SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2014

1. Per determinare $f(0)$ e $f(k)$, applichiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, che si può applicare essendo f continua per ipotesi:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow g'(x) = f(x).$$

Per le ipotesi del problema, sappiamo che:

- $g'(0) = 0$, poiché il grafico di g è tangente all'asse x in 0;
- $g'(k) = 0$, perché g ha un massimo in $x = k$.

Quindi $f(0) = g'(0) = 0$ e $f(k) = g'(k) = 0$, cioè la funzione f interseca l'asse x in $x = 0$ e in $x = k$.

La funzione f è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, w]$, quindi per il teorema di Weierstrass ha massimo e minimo assoluti.

Per studiare nel dettaglio l'andamento di f e tracciarne un probabile grafico, procediamo con lo studio della funzione.

Dal grafico di g notiamo anche che:

- $g'(x) > 0$ per $0 < x < k$, poiché g è crescente in questo intervallo;
- $g'(x) < 0$ per $k < x < w$, poiché g è decrescente in questo intervallo.

Siccome $f(x) = g'(x)$, scopriamo che $f(x)$ è positiva per $0 < x < k$ e negativa per $k < x < w$. In particolare, poiché f è definita anche negli estremi dell'intervallo, notiamo anche che $f(w) < 0$.

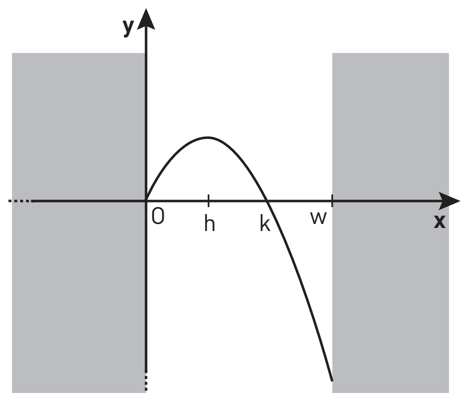
Passiamo allo studio della derivata prima: $f'(x) = g''(x)$, che è uguale a 0 per $x = h$ perché g presenta un flesso in quel punto per ipotesi. Quindi $x = h$ è un punto stazionario per f, ma per scoprire se è l'unico e se è un punto di massimo o minimo, dobbiamo studiare il segno di f'.

Dal grafico di g si evince che:

- $g''(x) > 0$ per $0 < x < h$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso l'alto;

- $g''(x) < 0$ per $h < x < w$, perchè la concavità di g in questo intervallo è rivolta verso il basso.

Poiché $f'(x) = g''(x)$, f è crescente per $0 < x < h$ e decrescente per $h < x < w$. Nel punto stazionario $x = h$ abbiamo quindi necessariamente un massimo di f, che è unico, mentre il minimo assoluto è in $x = 0$ oppure in $x = w$. Poiché $f(0) = 0$ e $f(w) < 0$, concludiamo che il minimo assoluto è in w.
Tracciamo un grafico indicativo di f in base alle informazioni raccolte.



2. Sapendo che la funzione $g(x)$ è polinomiale di terzo grado, possiamo esprimerla generalmente nella forma

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{con } a \neq 0.$$

La sua derivata prima in questo caso è dunque

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Dal grafico di g e per le ipotesi del problema, avevamo che $g(0) = 0$ e $g'(0) = 0$, quindi sostituendo $x = 0$ in entrambe le scritture, otteniamo che:

$$g(0) = d = 0 \qquad \text{e} \qquad g'(0) = c = 0.$$

Possiamo sostituire questi due valori nelle forme generali di g e g':

$$g(x) = ax^3 + bx^2,$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

Calcoliamo anche la derivata seconda di g:

$$g''(x) = 6ax + 2b.$$

Dalle ipotesi del problema sappiamo che $g(w) = 0$, $g'(k) = 0$ e $g''(h) = 0$, quindi sostituendo i valori $x = w$, $x = k$ e $x = h$ nelle espressioni di g, g' e g'', otteniamo:

$$\begin{cases} g(w) = aw^3 + bw^2 = 0 \Rightarrow w^2(aw + b) = 0 \Rightarrow aw + b = 0 \Rightarrow w = -\dfrac{b}{a} \\ g'(k) = 3ak^2 + 2bk = 0 \Rightarrow k(3ak + 2b) = 0 \Rightarrow 3ak + 2b = 0 \Rightarrow k = -\dfrac{2b}{3a} \\ g''(h) = 6ah + 2b \Rightarrow h = -\dfrac{b}{3a} \end{cases}$$

(poichè $w \neq 0$, $k \neq 0$ e $h \neq 0$). Ponendo $l = -\dfrac{b}{a}$, notiamo subito che:

$$h = \frac{1}{3}l, \qquad k = \frac{2}{3}l, \qquad w = l,$$

cioè i numeri h e k dividono l'intervallo $[0, w]$ in tre parti uguali.

3. Sostituiamo $w = 3$ nella formula generica di g trovata al punto precedente $g(x) = ax^3 + bx^2$, ricordando che $g(w) = 0$, e mettiamola a sistema con l'altra condizione $g(1) = \frac{2}{3}$.

$$\begin{cases} g(3) = 3^3a + 3^2b = 0 \\ g(1) = a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b = 0 \\ a + b = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a - 3a = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ -2a = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3a \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi l'espressione di g ricercata è $g(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2$.

Partiamo da questa espressione per ricercare le equazioni delle rette normali al grafico Γ di g nei punti di intersezione con la retta $y = \dfrac{2}{3}$.

Per calcolare le ascisse delle tangenti, poniamo a sistema l'equazione di g e della retta:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Per risolvere la prima equazione, proviamo a scomporre il polinomio usando la regola di Ruffini. Poniamo $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e cerchiamo tra i divisori del termine noto $\{1, -1, 2, -2\}$, i valori di x che annullano il polinomio.

$$P(1) = 1 - 3 + 2 = 0,$$

quindi il polinomio è divisibile per $x - 1$. Dallo schema

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & // \end{array}$$

otteniamo $(x^3 - 3x^2 + 2) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$, che implica $x = 1$ oppure $x^2 - 2x - 2 = 0$. Troviamo le radici di quest'ultima equazione:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Di esse solo $1 + \sqrt{3}$ è accettabile in quanto $1 - \sqrt{3} < 0$ non è compresa nel dominio della funzione. La retta $y = \frac{2}{3}$ interseca il grafico della funzione g nei due punti:

$$P_1 = \left(1, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(1 + \sqrt{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Calcoliamo i coefficienti angolari m_1 e m_2 delle rette tangenti a g in P_1 e P_2, che sono uguali ai valori della derivata di g calcolati nelle ascisse di P_1 e P_2.

$$g'(x) = -x^2 + 2x \Rightarrow \begin{cases} m_1 = g'(1) = 1 \\ m_2 = g'(1 + \sqrt{3}) = -2 \end{cases}$$

I coefficienti angolari n_1 e n_2 delle rette perpendicolari al grafico di g in P_1 e P_2 si ottengono ricordando che vale $n = -\frac{1}{m}$. Quindi $n_1 = -1$, $n_2 = \frac{1}{2}$.
L'equazione di un fascio di rette di centro (x_0, y_0) è

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

quindi le due rette normali al grafico di g passanti per P_1 e P_2 hanno equazioni

$$y - \frac{2}{3} = -(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -x + \frac{5}{3},$$

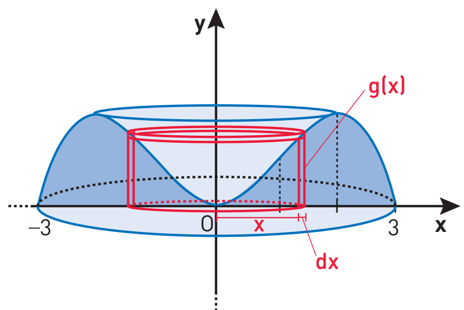
$$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x - (1 + \sqrt{3})\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Suddividiamo il solido W in cilindri cavi di spessore dx. Ciascuno di essi ha come base una corona circolare di raggio x e spessore dx, quindi il suo volume è pari a

$$V(x) = base \cdot altezza = (2\pi x \cdot dx) \cdot g(x).$$

Il volume di W si ottiene quindi sommando questi cilindri:

$$V(W) = \int_0^3 V(x) = W = \int_0^3 (2\pi x) g(x) dx,$$



da cui

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^3 (2\pi x)\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right) dx = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3\right) dx = 2\pi \left[-\frac{x^5}{15} + \frac{x^4}{4}\right]_0^3 = \\ &= 2\pi \left(-\frac{81}{5} + \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{10}\pi. \end{aligned}$$

Se il sistema monometrico Oxy ha unità di misura fissata in decimetri, notiamo che il solito W ha volume pari a $\frac{81}{10}\pi \simeq 25,45$ in dm^3, pari a $25,45$ litri.