**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013**

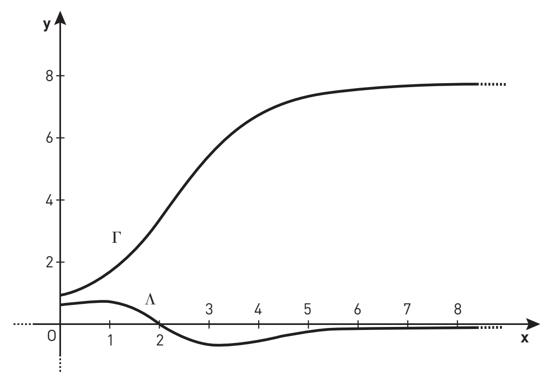
Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario[1].

## PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0, +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici $\Gamma$ e $\Lambda$ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a $\Gamma$ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$, passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per $\Gamma$ e $\Lambda$, rispettivamente.

1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni $x$ del dominio è $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$, qual è un possibile andamento di $f'(x)$?

2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che $\Gamma$ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?




3. Se $\Gamma$ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.

4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da $\Lambda$ e dall'asse $x$ sull'intervallo $[0, 2]$.

[1]Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

**PROBLEMA 2**

Sia $f$ la funzione definita per tutti gli $x$ positivi da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi $f$ e si tracci il suo grafico $\gamma$ su un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici $Oxy$; accertato che $\gamma$ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.

2. Sia $P$ il punto in cui $\gamma$ interseca l'asse $x$. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse $y$, passante per l'origine e tangente a $\gamma$ in $P$.

3. Sia $R$ la regione delimitata da $\gamma$ e dall'asse $x$ sull'intervallo aperto a sinistra $]0, 1]$. Si calcoli l'area di $R$, illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in $mm^2$ avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 *decimetro*.

4. Si disegni la curva simmetrica di $\gamma$ rispetto all'asse $y$ e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di $\gamma$ rispetto alla retta $y = -1$.

**QUESTIONARIO**

1. Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

3. Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per $B$ e avente distanza massima da $A$.

4. Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza $h$ e i lati $a$ e $b$ delle due basi. Si esprima il volume $V$ del tronco in funzione di $a$, $b$ e $h$, illustrando il ragionamento seguito.

5. In un libro si legge "*se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (p.es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè di 0,76%)*". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6. Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1234567 e 3546712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

7. In un gruppo di 10 persone il 60% ha occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

8. Si mostri, senza usare il teorema di *l'Hôpital*, che:
$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{sen\,x} - e^{sen\,\pi}}{x-\pi} = -1.$$

9. Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

10. Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3-x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0, 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.