SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Ha ragione Luisa: esistono più numeri irrazionali che razionali.
Il modo rigoroso di confrontare due insiemi infiniti A e B è quello di considerare opportune corrispondenze (o meglio, funzioni) tra di essi:

- si può dire che A e B *hanno lo stesso numero di elementi* (o che gli elementi di A sono *tanti quanti* quelli di B) se esiste una corrispondenza biunivoca (una funzione biettiva) tra A e B. Si dice anche che A ha *la stessa cardinalità di* B;

- si dice invece che B ha *più elementi* di A se esiste una funzione iniettiva da A a B (elementi distinti di A hanno come immagine elementi distinti in B) ma non esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. Si dice in questo caso che B *ha cardinalità maggiore di* A o che A *ha cardinalità minore di* B.

Si può vedere che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali ha la stessa cardinalità dell'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali.
Chiaramente, i numeri razionali comprendono al loro interno tutti i naturali, quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$; questo mostra che $\mathbb{N}$ ha cardinalità inferiore a $\mathbb{Q}$.
Dimostriamo che esiste una funzione iniettiva che va da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{N}$; così facendo, dimostriamo che i due insiemi hanno la stessa cardinalità. Se infatti a=card($\mathbb{N}$) e b=card($\mathbb{Q}$), cerchiamo una funzione che provi che $a \geq b$; sappiamo già che $a \leq b$, quindi l'esistenza delle funzione che cerchiamo prova che $a = b$
Consideriamo una successione di coppie di naturali, ordinata secondo il seguente criterio: si dividono le coppie in gruppi in cui è costante la somma di termini. Ogni gruppo, che è finito, si ordina mettendo in ordine crescente i primi termini di tutte le coppie.
La successione si costruisce mettendo una dopo l'altra le coppie di ogni gruppo.
Questi sono i primi elementi della successione: (1;1); (1;2), (2;1); (1;3), (2;2), (3;1); (1;4), (2;3), (3;2), (4;1); ...
Ogni elemento della successione può essere messo in corrispondenza con l'indice della posizione che occupa all'interno della successione; questo vuol dire che esiste una funzione iniettiva $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $(1;1) \mapsto 1$, $(1;2) \mapsto 2$, $(2;1) \mapsto 3$, $(3;1) \mapsto 4 \ldots$
Quindi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Consideriamo adesso l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} i: & Q^+ & \to & \mathbb{N} \\ & \dfrac{m}{n}, m, n \text{ primi tra loro} & \mapsto & (m;n) \end{array}$$

La funzione i è ben definita, perché se $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$ allora $i\left(\dfrac{m}{n}\right) = i\left(\dfrac{m'}{n'}\right)$. Inoltre, i è iniettiva, perché se $i\left(\dfrac{m}{n}\right) = i\left(\dfrac{m'}{n'}\right)$, ne deduciamo che $\dfrac{m}{n} = \dfrac{m'}{n'}$. Quindi $\mathbb{Q}^+$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La stessa costruzione si può fare per $\mathbb{Q}^-$, che ha quindi la stessa cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ che è la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$. Considerando che $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$, abbiamo dimostrato quel che volevamo provare.

D'altra parte, l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ha una cardinalità strettamente maggiore di quella di $\mathbb{N}$, il che vuol dire che non è possibile costruire una successione ordinata che comprenda tutti i numeri reali. In effetti, non è possibile nemmeno ordinare in una successione tutti i numeri compresi tra 0 e 1. L'argomento per dimostrare questo, dovuto a Georg Cantor, è detto 'argomento diagonale', e procede per assurdo.

Supponiamo di aver trovato una successione ordinata che includa tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1. Indichiamo con a_{ij} la j-esima cifra dell'i-esimo numero di questa successione; i primi elementi saranno quindi $0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$; $0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$; $0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots$; $\ldots$

Possiamo però trovare un altro numero, compreso tra 0 e 1, che non è compreso all'interno della successione, $b = 0, b_1b_2b_3\ldots$, in questo modo:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 \text{ se } 0 \leq a_{ii} < 9 \\ 0 \text{ se } a_{ii} = 9 \end{cases}$$

Il numero b non è nessuno di quelli presenti nella successione, perché differisce dal primo per la prima cifra, dal secondo per la seconda cifra, e in generale dall'i-esimo per l'i-esima cifra. Concludiamo pertanto che non è possibile mettere in corrispondenza $\mathbb{N}$ con l'intervallo [0,1[; a maggior ragione, non è possibile farlo neppure con l'intero insieme $\mathbb{R}$.

I numeri irrazionali sono l'insieme differenza $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, che ha cardinalità maggiore di $\mathbb{Q}$. Se così non fosse, anche $\mathbb{R}$ avrebbe la stessa cardinalità di $\mathbb{Q}$, perché $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$.

In conclusione, i numeri razionali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i naturali, mentre gli irrazionali hanno cardinalità maggiore, la cardinalità di $\mathbb{R}$, e sono quindi più numerosi.

Ha quindi ragione Luisa, "esistono più numeri irrazionali che razionali".