SOLUZIONE DEL QUESITO 8
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Il limite

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi}$$

è il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ calcolato in $x = \pi$ e corrisponde quindi alla derivata in quel punto. La funzione $f(x)$ è continua e derivabile per ogni x reale. Si ha:

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x.$$

In $x = \pi$, vale $f'(\pi) = e^{\operatorname{sen} \pi} \cos \pi = -1$, che corrisponde dunque al limite richiesto.

In alternativa, si può ottenere la stessa soluzione procedendo per sostituzione. Ponendo $y = x - \pi$, e ricordando che $e^{\mathrm{sen}\pi} = e^0 = 1$, si ottiene:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\mathrm{sen}x} - e^{\mathrm{sen}\pi}}{x - \pi} = \lim_{x \to \pi} \frac{e^{\mathrm{sen}x} - 1}{x - \pi} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{\mathrm{sen}(\pi + y)} - 1}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{e^{-\mathrm{sen}y} - 1}{y} =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{e^{-\mathrm{sen}y} - 1}{-\mathrm{sen}y} \cdot \frac{\mathrm{sen}y}{y} \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

