SOLUZIONE DEL QUESITO 5
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Si consideri un corpo che si dilata in tutte le direzioni di una certa percentuale λ, e si assuma che il corpo sia omogeneo e isotropo. Allora la dilatazione percentuale del volume del corpo è uguale a quella di una piccola porzione di tale corpo; consideriamo quindi una porzione assimilabile a un parallelepipedo di dimensioni a, b, c e di volume $V = abc$.
Consideriamo la dilatazione lungo le tre dimensioni:

$$\begin{cases} a' = a + \lambda \cdot a = a(1+\lambda) \\ b' = b + \lambda \cdot b = b(1+\lambda) \\ c' = c + \lambda \cdot c = c(1+\lambda) \end{cases} .$$

Il parallelepipedo dilatato ha quindi volume pari a

$$V' = a'b'c' = abc(1+\lambda)^3.$$

Calcoliamo l'incremento di volume:

$$\frac{V'-V}{V} = \frac{abc(1+\lambda)^3 - abc}{abc} = (1+\lambda)^3 - 1 = 1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 = 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3.$$

Tenendo conto che λ è generalmente un valore molto piccolo (per esempio, $\lambda = 0,38\%$) è possibile trascurare i termini di secondo e terzo grado (λ^2 e λ^3). Pertanto, $\frac{V'-V}{V} \simeq 3\lambda$.
Si conclude allora che il corpo si accresce in volume in proporzione tripla.
Analogamente, si dimostra che la superficie del corpo si accresce in proporzione doppia.
Infatti, si consideri una superficie rettangolare di lati a e b. Risulta:

$$S = ab, \qquad S' = a'b' = ab(1+\lambda)^2.$$

Calcolando l'incremento della superficie, si ottiene:

$$\frac{S'-S}{S} = \frac{ab(1+\lambda)^2 - ab}{ab} = (1+\lambda)^2 - 1 = 1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 2\lambda + \lambda^2 \simeq 2\lambda.$$

Anche qui l'approssimazione è valida nel caso in cui λ sia piccolo.
Si conclude allora che il corpo si accresce in superficie in proporzione doppia.