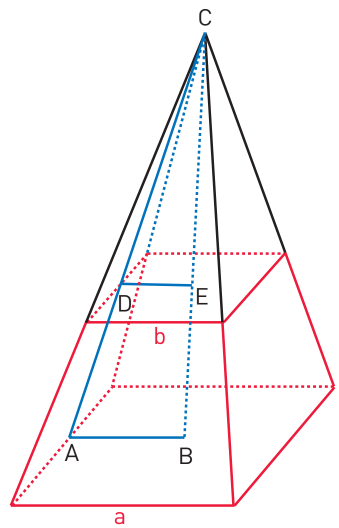
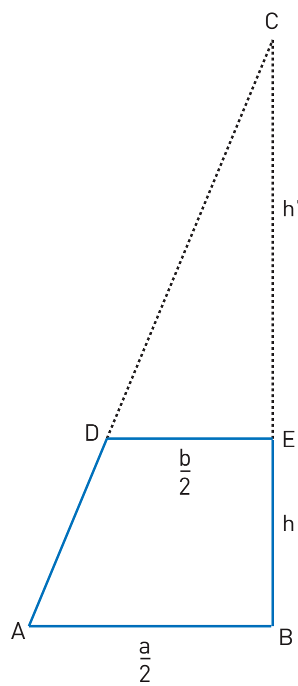
SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

Sia T il tronco di piramide retta quadrata, di altezza h e lati di base a e b.



Consideriamo la sezione indicata nella figura sottostante.



I triangoli ABC e CDE sono simili perché rettangoli e con un angolo in comune. Dunque, considerando la notazione utilizzata nella figura, $\frac{a}{2} : \frac{b}{2} = (h + h') : h'$ e quindi

$$\frac{a}{2}h' = \frac{b}{2}h + \frac{b}{2}h'$$

$$h' = \frac{\frac{b}{2}h}{\frac{a-b}{2}} = \frac{bh}{a-b}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P da cui il tronco è stato tagliato.

$$V_P = \frac{a^2(h+h')}{3} = \frac{a^2\left(h + \frac{bh}{a-b}\right)}{3} = \frac{a^2\frac{ah}{a-b}}{3} = \frac{a^3h}{3(a-b)}.$$

Calcoliamo il volume della piramide P' di altezza h', ottenuta sottraendo da P il tronco T:

$$V_{P'} = \frac{b^2h'}{3} = \frac{b^3h}{3(a-b)}$$

quindi il volume del tronco T si ricava facendo:

$$V_T = V_P - V_{P'} = \frac{h(a^3-b^3)}{3(a-b)} = \frac{h(a-b)(a^2+ab+b^2)}{3(a-b)} = \frac{h(a^2+ab+b^2)}{3}.$$

