

SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Consideriamo le funzioni $g(x) \stackrel{def}{=} f(x) - f(2x)$ e $h(x) \stackrel{def}{=} f(x) - f(4x)$. Le loro derivate, ottenute applicando le regole di derivazione di somma e composizione di funzioni, sono

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'(x) - 2f'(2x) \\h'(x) &= f'(x) - 4f'(4x).\end{aligned}$$

(In questa scrittura, come nel seguito della risoluzione, denotiamo per brevità con f' la derivata della funzione f .)

Le ipotesi del problema possono allora essere scritte come il sistema:

$$\begin{cases} g'(1) = 5 \\ g'(2) = 7 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7. \end{cases}$$

Se sommiamo alla prima equazione del sistema quella ottenuta moltiplicando per 2 ambo i membri della seconda, otteniamo:

$$f'(1) - 2f'(2) + 2[f'(2) - 2f'(4)] = 5 + 2 \cdot 7$$

cioè

$$f'(1) - 2f'(2) + 2f'(2) - 4f'(4) = 19,$$

da cui

$$f'(1) - 4f'(4) = 19.$$

Osservando che $f'(1) - 4f'(4)$ è proprio $h'(1)$, possiamo concludere che la derivata di $f'(x) - 4f'(4x)$ in $x = 1$ è uguale a 19.