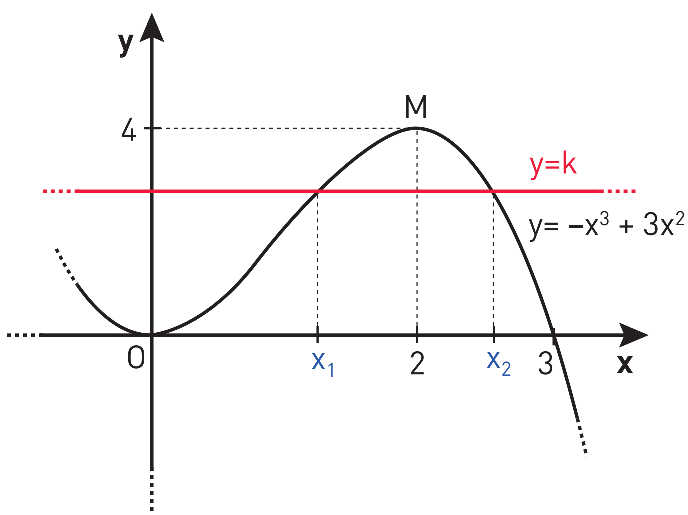
SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

Data l'equazione $x^2(3-x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$, si pongano entrambi i membri uguali a y e si vadano a studiare le intersezioni tra il fascio improprio di rette $y = k$ e il grafico della funzione cubica $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$. Tale funzione:

- si annulla nei punti $x = 0$ e $x = 3$;
- è positiva per $x < 3$ e negativa per $x > 3$;
- ha derivata prima $y' = -3x^2 + 6x$; essa si annulla per $x = 0$ e $x = 2$; $y' > 0$ per $0 < x < 2$, $y' < 0$ per $x < 0 \vee x > 2$, pertanto la funzione ha minimo in $x = 0$ con $f(0) = 0$ e massimo in $x = 2$ con $f(2) = 4$.

Consideriamo ora la generica retta $y = k$ e la funzione cubica nell'intervallo $[0; 3]$.



Osserviamo che esistono due intersezioni distinte per $0 < k < 4$ e quindi l'equazione di partenza $x^2(3-x) = k$ ammette due soluzioni distinte per $0 \leq k < 4$.

Posto $k = 3$ indichiamo con x_2 la soluzione maggiore dell'equazione $-x^3 + 3x = 3$. Considerata la funzione $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ e posto $x_2 = \bar{x}$, tale valore risulta l'unico zero per questa funzione nell'intervallo $[2; 3]$. La derivata prima è $g'(x) = 3x^2 - 6x$ e la derivata seconda $g''(x) = 6x - 6$. Essendo quest'ultima positiva nell'intervallo $[2; 3]$ possiamo applicare il metodo delle tangenti per ricavare un valore approssimato di $\bar{x}$.

Poiché $g(3) > 0$ poniamo $x_0 = 3$, sfruttiamo la seguente formula di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n^2 + 3}{3x_n^2 - 6x_n}$$

e compiliamo la tabella.

n	x_n	$g(x_n)$	$g'(x_n)$
0	3	3	9
1	2,6667	0,6296	5,3333
2	2,5486	0,0680	4,1946
3	2,5324	0,0012	4,0447
4	2,5321	$4 \cdot 10^{-7}$	4,0419

Osservando la tabella assumiamo che il valore di x approssimato alla seconda cifra decimale è 2,53.