SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Studiamo la funzione $f(x) = \dfrac{8}{4+x^2}$, con dominio $\mathbb{R}$ (infatti $x^2+4 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

   Notiamo che
   $$f(-x) = \frac{8}{4+(-x)^2} = \frac{8}{4+x^2} = f(x),$$
   cioè la funzione è pari e il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y.

   Cerchiamo ora le intersezioni di f con gli assi cartesiani.

   Asse x:
   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{8}{4+x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \nexists x \end{cases}$$

   Asse y:
   $$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{4+x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{8}{4} = 2 \end{cases}$$

   La funzione interseca dunque l'asse y nel punto $M(0;2)$.

   Passiamo allo studio del segno della funzione f:
   $$f(x) > 0 \Rightarrow \frac{8}{4+x^2} > 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R},$$
   dunque f è positiva (strettamente).

   Calcoliamo i limiti della funzione e ricerchiamone gli eventuali asintoti. Notiamo innanzitutto che, poiché f è definita su tutto $\mathbb{R}$, la funzione non presenta nessun asintoto verticale. Possiamo però calcolare i limiti per x che tende all'infinito:
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0,$$
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{8}{4+x^2} = 0.$$

Esiste quindi un asintoto orizzontale ed è $y = 0$. Non serve ricercare eventuali asintoti obliqui.

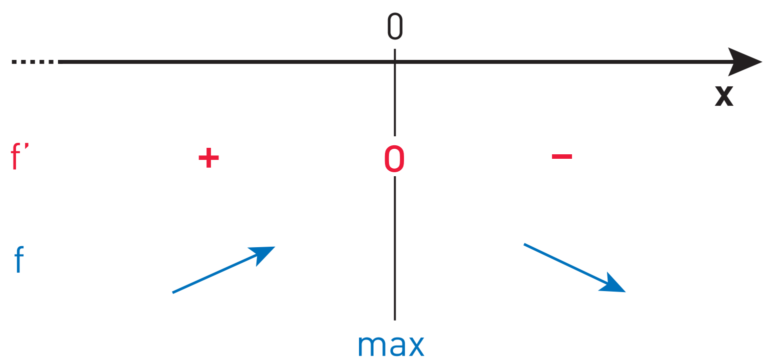
Procediamo calcolando la derivata prima di f:

$$f'(x) = -\frac{8 \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = -\frac{16x}{(4+x^2)^2}$$

e studiandone il segno:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow -\frac{16x}{(4+x^2)^2} > 0 \Rightarrow \frac{16x}{(4+x^2)^2} < 0.$$

Compiliamo lo schema dei segni: il numeratore assume segno positivo per $x > 0$, mentre il denominatore è positivo per ogni x in $\mathbb{R}$. Quindi $f'(x) > 0$ per $x < 0$, cioè la funzione f è crescente per $x < 0$, presenta un massimo in $x = 0$ (in cui assume valore $f(0) = 2$) e decresce per $x > 0$.



Studiamo ora la concavità della funzione, calcolandone la derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{16(4+x^2)^2 - 16x \cdot 2(4+x^2)2x}{(4+x^2)^4} = -\frac{16(4+x^2)^2 - 64x^2(4+x^2)}{(4+x^2)^4} =$$
$$= -\frac{(4+x^2)(64+16x^2-64x^2)}{(4+x^2)^4} = \frac{48x^2-64}{(4+x^2)^3} = \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3}$$

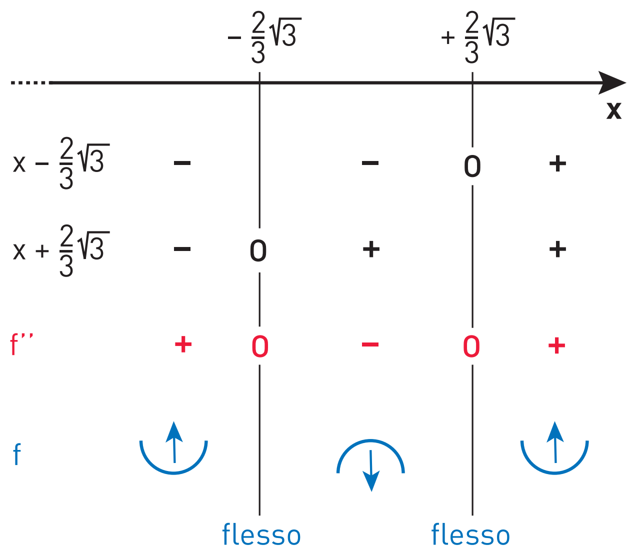
Vediamo il segno di f'':

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{16(3x^2-4)}{(4+x^2)^3} > 0$$

e studiamone separatamente numeratore e denominatore:

$$16(3x^2-4)>0 \Rightarrow 3x^2-4>0 \Rightarrow x^2-\frac{4}{3}>0 \Rightarrow x<-\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x>\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\to x<-\frac{2}{3}\sqrt{3} \vee x>\frac{2}{3}\sqrt{3},$$
$$(4+x^2)^3>0 \Rightarrow 4+x^2>0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

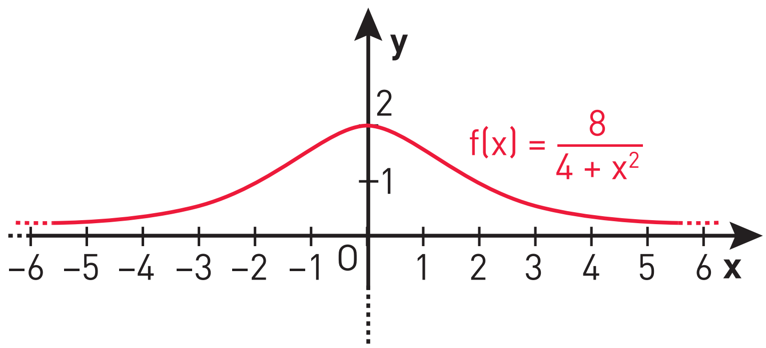
Compiliamo nuovamente lo schema dei segni.



Notiamo che f è convessa per $x<-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, concava per $-\frac{2}{3}\sqrt{3}<x<\frac{2}{3}\sqrt{3}$ e di nuovo convessa per $x>\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Vi sono dunque due punti di flesso, che chiameremo G e H, di coordinate:

$$f\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{8}{4+\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}\to G\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{3}{2}\right),$$
$$f\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)=\frac{8}{4+\frac{4}{3}}=\frac{3}{2}\to H\left(\frac{2}{3}\sqrt{3};\frac{3}{2}\right).$$

Con le informazioni dedotte finora, possiamo finalmente tracciare il grafico della funzione.



Cerchiamo le equazioni delle tangenti a Φ in $P(-2;1)$ e $Q(2;1)$. A tal fine, calcoliamo la pendenza delle tangenti in questi due punti.

$$f'(-2) = -\frac{16(-2)}{(4+(-2)^2)^2} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$$

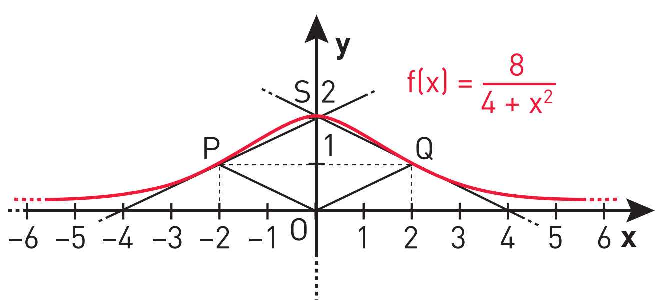
$$f'(2) = -\frac{16 \cdot 2}{(4+2^2)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$$

La generica retta per P è $y-1 = m(x+2)$. Allora deve valere $m = \frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in P è

$$y - 1 = \frac{1}{2}x + 1 \to t_1 : y = \frac{1}{2}x + 2.$$

La generica retta per Q è $y-1 = m(x-2)$. Di nuovo, deve valere $m = -\frac{1}{2}$, dunque la tangente a Φ in Q è

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \to t_2 : y = -\frac{1}{2}x + 2.$$



Troviamo le coordinate del punto d'intersezione delle due rette t_1 e t_2:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2 = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

e chiamiamo questo punto $S(0;2)$.

Per verificare che il quadrilatero è un rombo, dobbiamo controllare che è un parallelogrammo e che i suoi quattro lati sono congruenti.

Verifichiamo dapprima che i lati sono a due a due paralleli. Troviamo l'equazione della retta che passa per OP:

$$r_{OP} : \frac{y}{1} = \frac{x}{-2} \Rightarrow r_{OP} : y = -\frac{1}{2}x$$

e l'equazione della retta che passa per OQ:

$$r_{OQ} : y = \frac{y}{2} = \frac{x}{1} \Rightarrow r_{OQ} : y = \frac{1}{2}x.$$

Dunque $r_{OP} /\!/ t_2$ e $r_{OQ} /\!/ t_1$, quindi $OQSP$ è un parallelogrammo. Calcoliamo ora le misure dei lati, ricordando la formula

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}.$$

$\overline{OP} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{OQ} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{PS} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
$\overline{SQ} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$,
dunque $OQSP$ è un rombo.

(In alternativa, una volta dimostrato che $OQSP$ è un parallelogrammo, si poteva scegliere di dimostrare che le sue diagonali sono perpendicolari tra loro; anche in questo modo si sarebbe potuto concludere che $OQSP$ è un rombo.)

Ricordiamo che, date due rette s e t, la tangente dell'angolo γ compreso tra le due è data da

$$\operatorname{tg}\gamma = \left|\frac{m_s - m_t}{1 + m_s m_t}\right|.$$

Dunque vale:

$$\operatorname{tg} S\hat{P}O = \left|\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow S\hat{P}O \simeq 53°08'.$$

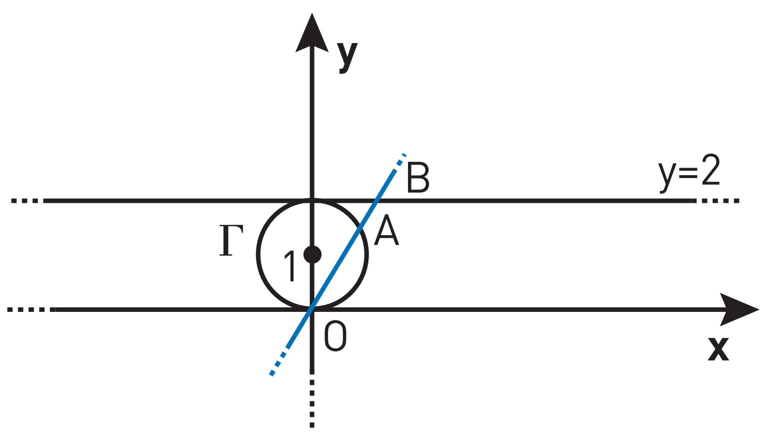
Poiché $OQSP$ è un rombo, $S\hat{P}O = S\hat{Q}O$ e $P\hat{S}Q = Q\hat{O}P = 180° - S\hat{P}O = 180° - 53°08' = 136°52'$.

2. La circonferenza Γ ha equazione $x^2+(y-1)^2=1$ e l'equazione di una generica retta passante per l'origine è $t: y=mx$. Calcoliamo le coordinate di A.

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+(y-1)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=mx \\ x^2+m^2x^2-2mx=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y=mx \\ x^2(m^2+1)-2mx=0 \end{cases}$$

Per $x=0$, otteniamo l'origine O. Possiamo quindi supporre $x\neq 0$ e semplificare la seconda equazione:

$$\begin{cases} y=mx \\ x(m^2+1)-2m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2m}{m^2+1} \\ y=\dfrac{2m^2}{m^2+1} \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{2m}{m^2+1};\frac{2m^2}{m^2+1}\right).$$



Calcoliamo le coordinate di B:

$$\begin{cases} y=mx \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{m} \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{m};2\right).$$

Verifichiamo che (x_B, y_A) è un punto di Φ sostituendo nell'equazione $y=f(x)$. Deve valere:

$$y_A=\frac{8}{4+x_B^2},$$

cioè

$$\frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8}{4+\frac{4}{m^2}} \Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8}{\frac{4m^2+4}{m^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{8m^2}{4m^2+4}$$
$$\Rightarrow \frac{2m^2}{m^2+1} = \frac{2m^2}{m^2+1}.$$

Il punto (x_B, y_A) appartiene effettivamente a Φ.

3. Calcoliamo l'area di R con un integrale.

$$\mathcal{A}(R) = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{8}{4+x^2}\,dx = 8\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx =$$
$$= 8\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{2}\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}\,dx = 4\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^2 = 4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

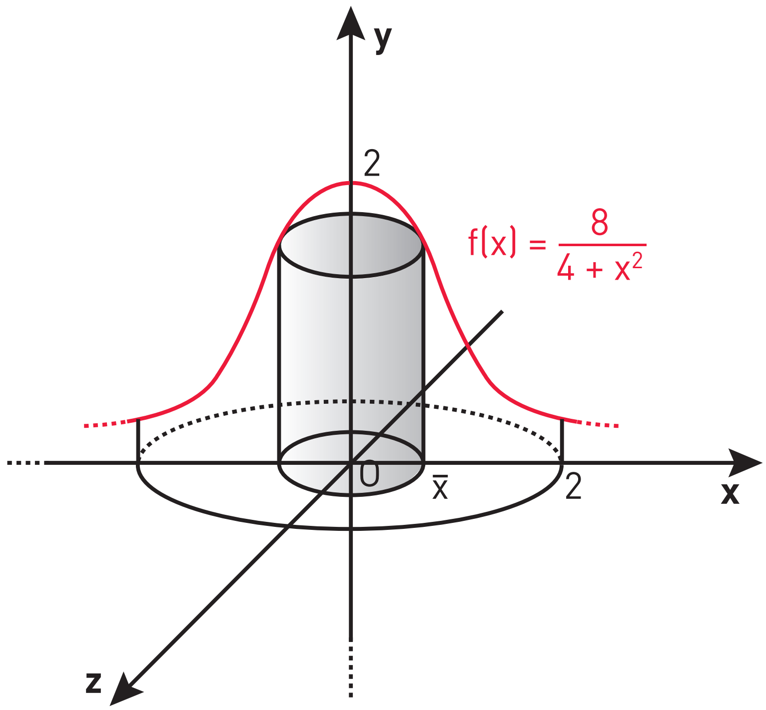
L'area del cerchio delimitato da Γ è invece data dalla formula

$$A_\Gamma = \pi r^2 = \pi.$$

Dunque R e il cerchio delimitato da Γ sono equivalenti. Calcoliamo ora l'area della regione compresa tra Φ e l'intero asse x: integriamo nell'intervallo illimitato $[0, +\infty[$, ricordando che $f(x)$ è pari.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{8}{4+x^2}\,dx =$$
$$= 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{8}{4+t^2}\,dt = 2\lim_{x\to+\infty}\left[4\operatorname{arctg}\frac{t}{2}\right]_0^x =$$
$$= 2\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi$$

4. Prendiamo $\overline{x}$ tale che $0 \le \overline{x} \le 2$ e consideriamo il cilindro la cui base è centrata in O e ha raggio $\overline{x}$, e la cui altezza è $f(\overline{x})$.



La superficie laterale del cilindro è data da $S(\overline{x}) = 2\pi\overline{x}f(\overline{x})$.

Per ottenere il volume di W basta dunque integrare $S(x)$ da 0 a 2:

$$V_W = 2\pi \int_0^2 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^2 \frac{8x}{4+x^2}\, dx.$$

Alternativamente, si poteva suddividere il volume ricercato in un cilindro (di raggio 2 e altezza $f(2) = 1$) e in un solido dato dalla rotazione attorno all'asse y del tratto di $f(x)$ compreso tra le ascisse 0 e 2.

Procedendo in questo modo, si poteva scrivere:

$$V = \pi r^2 h + \pi \int_1^2 g^2(y) dy$$

dove $f(x) = y = 8/(4 + x^2)$, e dunque, invertendo, $g(y) = x = \sqrt{(8 - 4y)/y}$.