SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2013

1. La funzione data: $f(x) = x^3 \ln x$ è definita per $x > 0$. Il dominio della funzione è $D_f =]0, +\infty[$.

   Cerchiamo le eventuali simmetrie della funzione. Il dominio non è simmetrico rispetto a $x = 0$, quindi f non è né pari né dispari.

   Cerchiamo ora eventuali intersezioni della funzione con gli assi.

   Osserviamo che il grafico della funzione non interseca l'asse y visto che $x = 0$ non appartiene al dominio.

   Studiamo le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 \ln x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

   Il grafico della funzione interseca l'asse x nel punto di coordinate $P(1; 0)$.

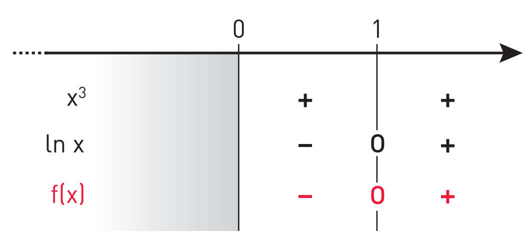
   Studiamo il segno della funzione:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 \ln x > 0.$$

   Quindi:

$$\begin{cases} x^3 > 0 \Rightarrow x > 0, \\ \ln x > 0 \Rightarrow x > 1. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^3 < 0 \Rightarrow x < 0, \\ \ln x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1. \end{cases}$$

   Considerando che il secondo sistema non ammette soluzioni, compiliamo il quadro dei segni.



   La funzione assume valori positivi per $x > 1$, valori negativi per $0 < x < 1$.
   Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio.

   - $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 \ln x.$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $0 \cdot \infty$; risolviamolo applicando il teorema di De L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(-\frac{x^4}{3}\right) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0.$$

Allora $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^3 \ln x = +\infty$. Quindi non ci sono asintoti orizzontali.
  Ricerchiamo l'eventuale asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} x^2 \ln x = +\infty.$$

Ne deduciamo che la funzione non presenta asintoti di alcun tipo.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1).$$

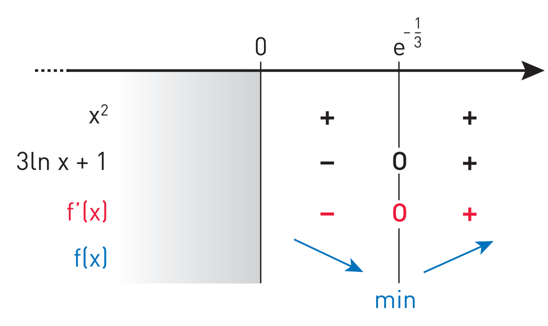
Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3\ln x + 1) > 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} x^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ 3\ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x > e^{-\frac{1}{3}}. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 < 0, \\ 3\ln x + 1 < 0. \end{cases}$$

Tenuto conto che il secondo sistema non ammette soluzioni, e per il primo sono accettabili solo quelle appartenenti al dominio di f, compiliamo il grafico dei segni.



La funzione è decrescente per $0 < x < e^{-\frac{1}{3}}$, crescente per $x > e^{-\frac{1}{3}}$, quindi ha un minimo assoluto per $x = e^{-\frac{1}{3}} \simeq 0,717$.

$$f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3e} \simeq -0,123.$$

Il punto di minimo della funzione ha coordinate $A\left(e^{-\frac{1}{3}}; -\dfrac{1}{3e}\right)$.

Calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 2x(3\ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6\ln x + 5).$$

Studiamo il segno di $f''(x)$:

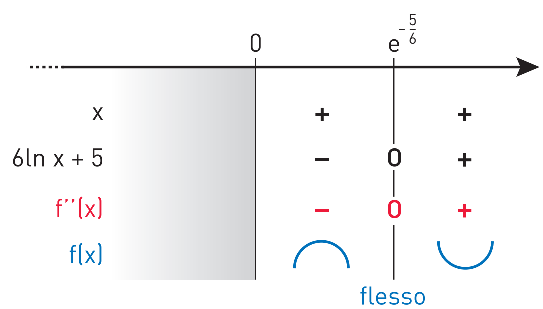
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x(6\ln x + 5) > 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 6\ln x + 5 > 0 \Rightarrow \ln x > -\dfrac{5}{6} \Rightarrow x > e^{-\frac{5}{6}}. \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 6\ln x + 5 < 0. \end{cases}$$

Tenuto conto che solo il primo sistema ammette soluzioni, compiliamo il grafico dei segni.

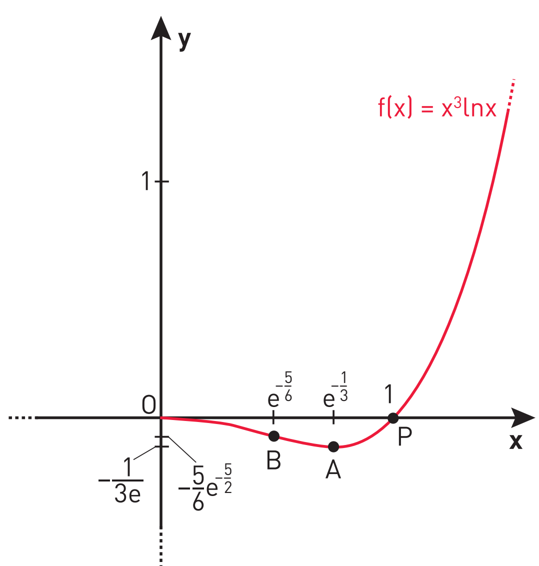
Il grafico della funzione ha la concavità verso il basso per $0 < x < e^{-\frac{5}{6}}$, verso l'alto per $x > e^{-\frac{5}{6}}$; ha un punto di flesso per $x = e^{-\frac{5}{6}} \simeq 0,435$.



$$f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = \left(e^{-\frac{5}{6}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} \simeq -0,068.$$

Il punto di flesso della funzione ha coordinate $B\left(e^{-\frac{5}{6}}; -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.

Tracciamo il grafico probabile della funzione.



2. L'equazione della generica parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate è:

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad \text{con } a \neq 0.$$

Imponiamo il passaggio per $P(1;0)$ e per l'origine $O(0;0)$:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ 0 = c \end{cases} \to \begin{cases} b = -a \\ 0 = c \end{cases}.$$

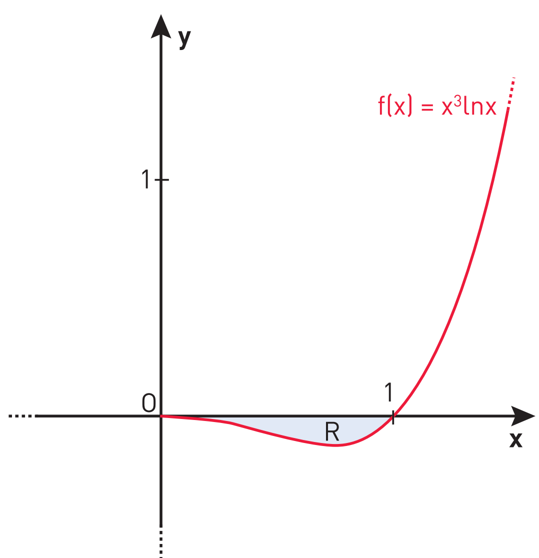
L'equazione della parabola cercata è del tipo $y = ax^2 - ax$. Il grafico γ della funzione e la parabola hanno la stessa retta tangente in $P(1;0)$. Calcoliamo i coefficienti angolari di queste rette tangenti e uguagliamoli:

- per la funzione $f(x)$: $y' = x^2(3\ln x + 1) \to y'(1) = 1(3\ln 1 + 1) = 1$;
- per la parabola: $y' = 2ax - a \to y'(1) = 2a \cdot 1 - a = a$.

Uguagliamo i valori: $1 = a$.

La parabola ha equazione: $y = x^2 - x$.

3. Disegniamo la regione di cui vogliamo calcolare l'area.



L'area della regione R è data da:

$$\mathcal{A}(R) = -\int_0^1 f(x)dx = -\int_0^1 x^3 \ln x dx.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito, applicando il teorema di integrazione per parti:

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx =$$
$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + c = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + c.$$

La funzione $f(x)$ non è definita in $x = 0$, quindi l'integrale definito in $[0; 1]$ è un integrale improprio. Calcoliamolo mediante il limite:

$$\int_0^1 x^3 \ln x dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^3 \ln x dx = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} \right]_t^1 =$$
$$= \lim_{t \to 0^+} \left[\left(0 - \frac{1}{16} \right) - \left(\frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} \right) \right] = -\frac{1}{16}.$$

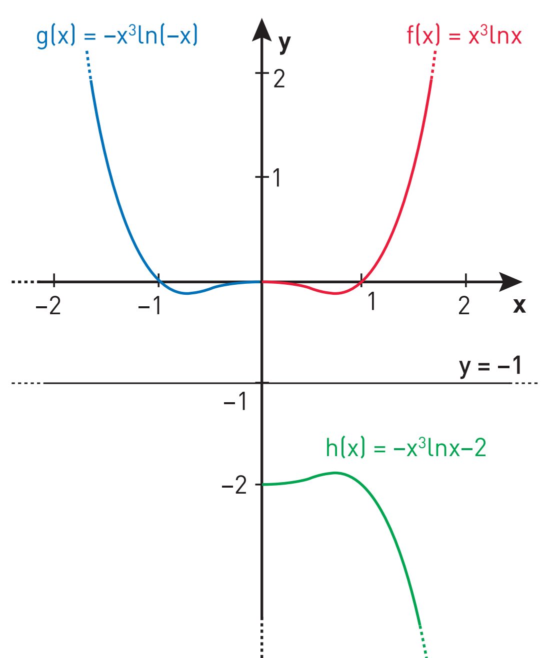
La misura dell'area della regione R è quindi uguale a:

$$\mathcal{A}(R) = -\left(-\frac{1}{16} \right) = \frac{1}{16}.$$

Questo valore è espresso in dm^2; convertiamolo in mm^2:

$$\mathcal{A}(R) = \frac{1}{16} \text{dm}^2 = \frac{1}{16} 10^4 \text{mm}^2 = 625 \text{mm}^2.$$

4. Disegniamo la curva simmetrica di γ rispetto all'asse y e la curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.



Determiniamo l'equazione della curva γ_1 simmetrica di γ rispetto all'asse y.

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \to \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \to y' = (-x')^3 \ln(-x'), \qquad \text{con } x' < 0.$$

Togliamo gli apici e troviamo l'equazione di γ_1:

$$g(x) = -x^3 \ln(-x), \qquad \text{con } x < 0.$$

Determiniamo l'equazione della curva γ_2 simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y - 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = x' \\ y = -y' - 2 \end{cases} \to -y' - 2 = (x')^3 \ln x' \to y' = -(x')^3 \ln x' - 2.$$

Togliamo gli apici e troviamo l'equazione di γ_2:

$$h(x) = -x^3 \ln x - 2, \qquad \text{con } x > 0.$$