SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2013

1. Data la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right] dt,$$

per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la sua derivata coincide con la funzione integranda:

$$f'(x) = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}.$$

Possiamo calcolare i valori richiesti:

$$f'(\pi) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$f'(2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2} + \frac{1}{2} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Per disegnare il grafico Σ di $f'(x)$, calcoliamo le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani.

Asse y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \cos\frac{0}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(0; \frac{3}{2}\right).$$

Asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ \cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Determiniamo le soluzioni dell'equazione

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$$

nell'intervallo [0, 9].

Si ottiene

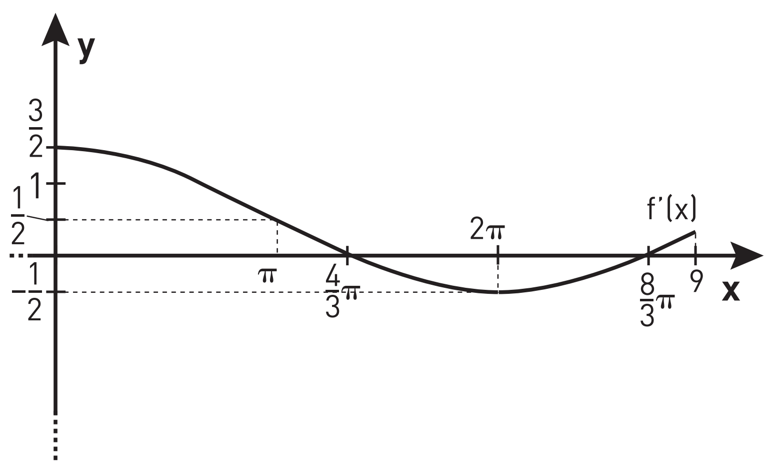
$$\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}\pi + 2h\pi, \text{ con } h \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{4}{3}\pi + 4h\pi.$$

oppure

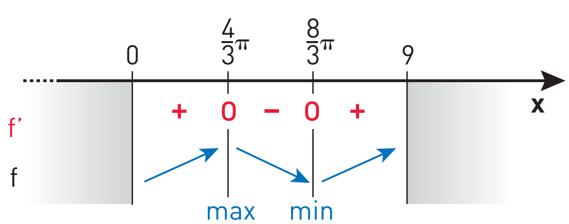
$$\frac{x}{2} = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3}\pi + 4k\pi.$$

Nell'intervallo $[0, 9]$ le soluzioni da considerare sono $x = \frac{8}{3}\pi$ che si ottiene per $h = 1$ e $x = \frac{4}{3}\pi$ che si ottiene $k = 0$.

La funzione $f'(x)$ si ottiene mediante una dilatazione della funzione coseno rispetto all'asse x e una sua traslazione rispetto all'asse y. Disegniamo il grafico Σ di $f'(x)$.



Dal grafico dei segni di $f'(x)$ determiniamo gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$.



La funzione $f(x)$ ha un massimo per $x = \frac{4}{3}\pi$ e un minimo per $x = \frac{8}{3}\pi$.

Per $x = 0$ è:

$$f(0) = \int_0^0 \left[\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\right]\, dt = 0.$$

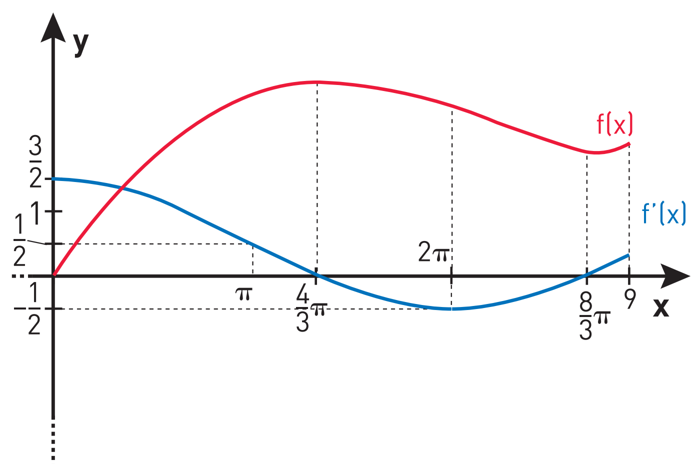
La retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x = 0$ ha coefficiente angolare pari a

$$f'(0) = \frac{3}{2} = 1,5;$$

tale retta passa per l'origine e ha equazione $y = \frac{3}{2}x$. Poiché $f'(x)$ ha un punto di minimo per $x = 2\pi$ (è decrescente in un intorno sinistro, crescente in un intorno destro), risulta che $f''(x)$ si annulla in $x = 2\pi$ (è negativa in un intorno sinistro, positiva in un intorno destro).

Quindi $x = 2\pi$ è un punto di flesso per $f(x)$, con concavità verso il basso in un intorno sinistro e verso l'alto in un intorno destro.

Con le informazioni ottenute possiamo disegnare un possibile grafico di $f(x)$.



3. Il valor medio di $f'(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$ è dato da:

$$m = \frac{1}{2\pi - 0}\int_0^{2\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\, dx.$$

Calcoliamo l'integrale con il metodo di sostituzione. Poniamo

$$\frac{x}{2} = t,$$

dunque $x = 2t$ e $dx = 2dt$. Se $x = 0$, si ha $t = 0$; se $x = 2\pi$, allora $t = \pi$. Quindi

$$\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\, dx = \int_0^{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{2}\right)\, 2dt = 2\left[\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t\right]_0^{\pi} = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Il valor medio è quindi uguale a

$$m = \frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}.$$

4. Il volume V del solido W è dato dall'integrale esteso all'intervallo $[0; 4]$ della funzione $A(x)$ che esprime l'area di ciascuna sezione.

$$V = \int_0^4 A(x)\ dx = \int_0^4 3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} x\ dx = \left[3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} x \right) \cdot \frac{4}{\pi} \right]_0^4 =$$
$$= 3(-\cos \pi) \cdot \frac{4}{\pi} - 3(-\cos 0) \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{12}{\pi} + \frac{12}{\pi} = \frac{24}{\pi}.$$

