SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2013

1. La condizione per la presenza di un punto x_0 di massimo o di minimo per una funzione continua e derivabile è che la sua derivata prima si annulli in x_0 e che cambi di segno in un intorno di x_0.

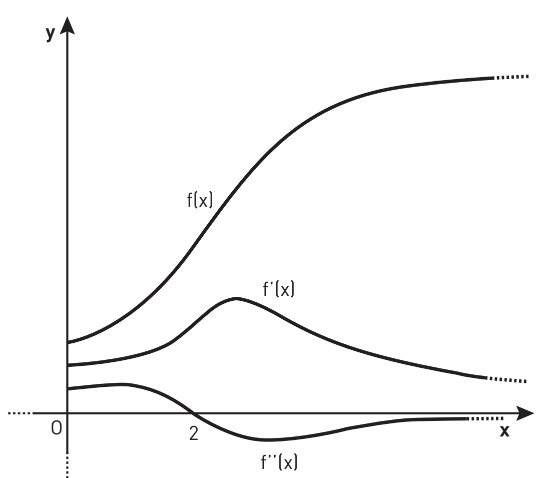
   La derivata della funzione $f'(x)$ è $f''(x)$, cioè il grafico Λ che si annulla nel punto $x = 2$. Per stabilire se il punto $x = 2$ è un massimo o un minimo si deve esaminare il segno di $f''(x)$ in un intorno sinistro e destro di 2. Nell'intorno sinistro di 2 è $f''(x) > 0$, quindi $f'(x)$ è crescente per $0 < x < 2$. Viceversa per $x > 2$ si ha $f''(x) < 0$ e di conseguenza $f'(x)$ è decrescente per quei valori.

   $x = 2$ è quindi un massimo di $f'(x)$.

   Il valore di $f'(2)$ è la pendenza della retta tangente al grafico Γ di $f(x)$ nel punto di ascissa $x = 2$. La tangente a Γ nel punto $(2; 4)$ passa anche per l'origine, quindi la sua equazione è $y = 2x$. La pendenza è 2, quindi le coordinate del massimo di $f'(x)$ sono $(2; 2)$.

   Dal grafico Γ si deduce che $f(x)$ è sempre crescente e che $f'(x) > 0$ per $x \in [0; +\infty[$. La funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale, di conseguenza la retta tangente a $f(x)$ per $x \to +\infty$ ha coefficiente angolare che tende a 0. Perciò $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

   Un possibile grafico di $f'(x)$, ricordando che $f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$ per $x \in [0; +\infty[$ è quello rappresentato in figura.



2. Dal grafico di $f(x)$ si deduce un alto tasso di crescita iniziale che aumenta fino a quando la curva cambia la concavità (punto di flesso). Dal punto $x = 2$ la popolazione continua ad aumentare, ma a un tasso di crescita via via inferiore perché la sua derivata prima è sempre strettamente positiva ma tende a zero.

   All'aumentare di x la popolazione si avvicina sempre più al valore 8 (senza mai raggiungerlo).

3. Per $f(x) = \dfrac{a}{1+e^{b-x}}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{1+e^{b-x}} = \frac{a}{1+0} = 8$$

   da cui segue che $a = 8$. Sappiamo inoltre che $f(2) = 4$, quindi

$$\frac{8}{1+e^{b-2}} = 4 \Rightarrow 8 = 4 + 4e^{b-2} \Rightarrow 1 = e^{b-2} \Rightarrow \ln 1 = b - 2 \Rightarrow b = 2.$$

4. Dal punto 3 abbiamo $f(x) = \dfrac{8}{1+e^{2-x}}$.

   L'area delimitata da Λ e dall'asse x per $x \in [0;2]$ è uguale a $\int_0^2 f''(x)dx$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale $\int_0^2 f''(x)dx = f'(2) - f'(0)$, essendo $f'(x)$ una primitiva di $f''(x)$.

   Conosciamo già $f'(2) = 2$; per trovare $f'(0)$ calcoliamo la derivata prima della $f(x)$:

$$f(x) = \frac{8}{1+\frac{e^2}{e^x}} = \frac{8}{\frac{e^x+e^2}{e^x}} = \frac{8e^x}{e^x+e^2}$$

$$f'(x) = \frac{8e^x(e^x+e^2) - 8e^xe^x}{(e^x+e^2)^2} = \frac{8e^{2x} + 8e^{2+x} - 8e^{2x}}{(e^x+e^2)^2} = \frac{8e^{2+x}}{(e^x+e^2)^2}.$$

   Quindi:

$$f'(0) = \frac{8e^2}{(e^2+1)^2}, \quad \int_0^2 f''(x)dx = 2 - \frac{8}{e^2} = 2 - \frac{8e^2}{(e^2+1)^2}.$$

