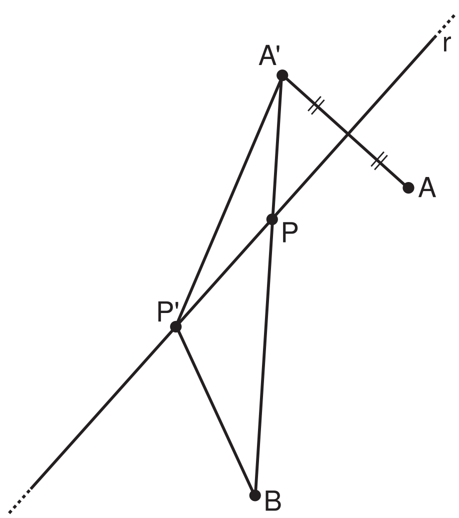
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Prima di tutto osserviamo che il cammino minimo che congiunge A e B è una spezzata composta da due segmenti. Questo perchè

1. i cammini che minimizzano le distanze sono segmenti;
2. qualunque cammino che congiunga A e B toccando r si può scrivere come l'unione di due cammini, il primo congiungente A ed r, il secondo congiungente r e B;
3. ognuno dei due cammini appena introdotti è minimo se e solo se è un segmento.

I Metodo: Sia A' il punto simmetrico di A rispetto alla retta r. Consideriamo il segmento $A'B$. Tale segmento interseca la retta r in un punto P poiché A' e B appartengono a semipiani diversi rispetto ad r. Dimostriamo che P è il punto che realizza il cammino che cerchiamo. Se con P' denotiamo un arbitrario punto della retta (dove $P' \neq P$), considerando il triangolo non degenere $A'P'B$, vale che $A'P' + BP' > A'B$.

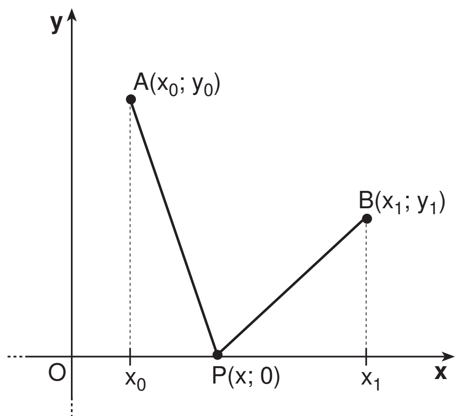


Clicca qui per guardare l'animazione su MATUTOR!

II Metodo: Per semplicità nei calcoli, possiamo considerare come retta l'asse delle x di equazione $y = 0$. Un generico punto P su tale retta avrà dunque coordinate $P(x; 0)$. Possiamo limitarci a considerare i punti $A(x_0; y_0)$ e $B(x_1; y_1)$ con $y_0 > 0$, $y_1 > 0$ (si potrebbe ragionare analogamente se fosse $y_0 < 0$ e $y_1 < 0$). Possiamo anche ipotizzare che $x_0 < x < x_1$.

Sia $f(x) = d(A, P) + d(B, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}$.

Cerchiamo un punto P di coordinate $P(x; 0)$ per cui $f(x)$ assuma valore minimo. Studiamo dunque la derivata prima di $f(x)$.



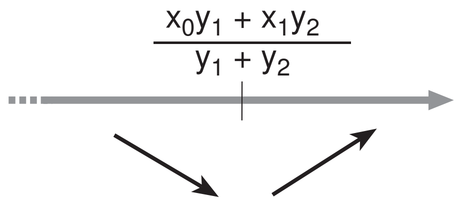
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}} + \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_0)\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} \geq -(x - x_1)\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}.
\end{aligned}
$$

Poiché abbiamo assunto $x_0 < x < x_1$, ne consegue che entrambi i membri dell'ultima disequazione sono positivi. Elevandoli al quadrato si ottiene

$$
\begin{gathered}
(x - x_0)^2 \left[(x - x_1)^2 + y_1^2\right] \geq (x_1 - x)^2 \left[(x - x_0)^2 + y_0^2\right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x - x_0)^2(x - x_1)^2 + (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2(x - x_0)^2 + (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x - x_0)^2 y_1^2 \geq (x_1 - x)^2 y_0^2 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 \geq \left(\frac{x_1 - x}{x - x_0}\right)^2.
\end{gathered}
$$

Poichè $y_0, y_1 > 0$ e $x_0 < x < x_1$ vale che $\frac{y_1}{y_0} > 0$ e $\frac{x_1 - x}{x - x_0} > 0$, e dunque si ha che

$$
\begin{gathered}
\frac{y_1}{y_0} \geq \frac{x_1 - x}{x - x_0} \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow y_1 x - x_0 y_1 \geq x_1 y_0 - x y_0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow x \geq \frac{x_0 y_1 + x_1 y_0}{y_0 + y_1}.
\end{gathered}
$$



Il cammino cercato è quindi dato dall'unione dei segmenti AP e PB, dove P ha coordinate $P\left(\frac{x_0y_1 + x_1y_0}{y_0 + y_1}; 0\right)$.

