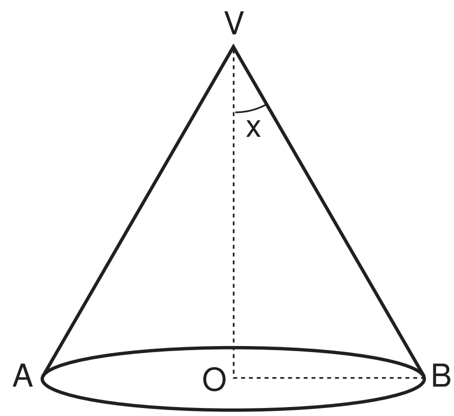
SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO DI ORDINAMENTO 2012



È dato il cono di vertice V, altezza OV e apotema $BV = 1$ m.
Omettiamo inizialmente per comodità l'unità di misura.
Indichiamo con x l'angolo $O\widehat{V}B$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per i teoremi dei triangoli rettangoli, risulta:

$$OV = BV \cdot \cos x = 1 \cdot \cos x = \cos x,$$
$$OB = BV \cdot \operatorname{sen} x = 1 \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

Calcoliamo il volume Vol del cono:

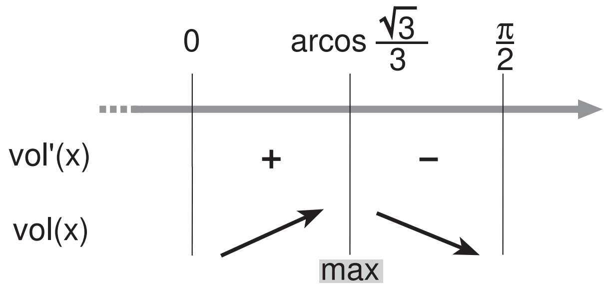
$$\mathrm{Vol}(x) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OB^2 \cdot OV = \frac{\pi}{3} \operatorname{sen}^2 x \cos x = \frac{\pi}{3}(1 - \cos^2 x)\cos x = \frac{\pi}{3}(\cos x - \cos^3 x).$$

Calcoliamo la derivata prima $\mathrm{Vol}'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\mathrm{Vol}'(x) = \frac{\pi}{3}(-\operatorname{sen} x + 3\cos^2 x \operatorname{sen} x) = \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} x(-1 + 3\cos^2 x).$$

Visto che per ogni $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{sen} x > 0$, allora $\mathrm{Vol}'(x) > 0$ se e solo se $-1 + 3\cos^2 x > 0$, con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, cioè

$$\begin{cases} \cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$



da cui $0 < x < \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Il volume $\mathrm{Vol}(x)$ è massimo per $x = \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, e quindi:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_{\max} = \mathrm{Vol}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{\pi}{3}\left(\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \cos^3\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \\ &= \frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \frac{2\cdot\pi}{27}\sqrt{3} \simeq 0,403\,\mathrm{m}^3.\end{aligned}$$

Valutiamo la capacità in litri tenuto conto che $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\ell$:

$$\mathrm{Vol}_{\max} \simeq 0,403\,\mathrm{m}^3 = 403\,\ell.$$