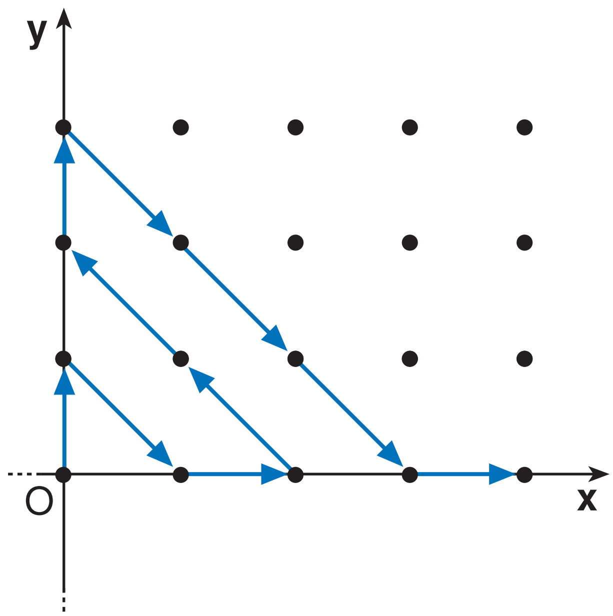
SOLUZIONE DEL QUESITO 4
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Dimostriamo inizialmente che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Osserviamo la seguente figura. Se seguiamo la biscia blu possiamo costruire una applica-



zione biunivoca da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$ nel seguente modo.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\
(0;0) & \mapsto & 0 \\
(0;1) & \mapsto & 1 \\
(1;0) & \mapsto & 2 \\
(2;0) & \mapsto & 3 \\
(1;1) & \mapsto & 4 \\
(0;2) & \mapsto & 5 \\
(0;3) & \mapsto & 6 \\
(1;2) & \mapsto & 7 \\
\vdots & \mapsto & \vdots
\end{array}$$

Risulta così dimostrato che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile.

Dimostriamo ora che $\mathbb{Q}^+$ ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

Consideriamo l'applicazione

$$
\begin{array}{rccc}
i: & \mathbb{Q}^+ & \rightarrow & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\
& \frac{m}{n} \text{ con } m,n \text{ primi fra loro} & \mapsto & (m;n)
\end{array}
$$

Si ha che i è ben definita infatti se $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ allora $i(\frac{m}{n})=i(\frac{m'}{n'})$.
Inoltre i è iniettiva poiché se $i(\frac{m}{n})=i(\frac{m'}{n'})$ allora $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$.
Abbiamo così dimostrato che $i(\mathbb{Q}^+)\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, quindi la cardinalità di $\mathbb{Q}^+$ è al più la cardinalità di $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Poiché $\mathbb{Q}^+$ è un insieme infinito necessariamente la cardinalità di $\mathbb{Q}^+$ è quella di $\mathbb{N}$.
Lo stesso ragionamento si può ripetere con $\mathbb{Q}^-$. Possiamo così affermare che

$$\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^+\cup\mathbb{Q}^-\cup\{0\}$$

è numerabile perché unione finita di insiemi numerabili.