SOLUZIONE DEL QUESITO 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

Una retta r è asintoto per la funzione $y = f(x)$ se la distanza da r di un generico punto P appartenente al grafico della funzione tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata di P, o entrambe, tendono all'infinito. In particolare:

- r è asintoto orizzontale e ha equazione $y = a$, $a \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$;
- r è asintoto verticale e ha equazione $x = b$, $b \in \mathbb{R}$, se $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$;

  r è asintoto obliquo e ha equazione $y = mx + q$, $m, q \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, se $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = q$.

Consideriamo, ad esempio, la funzione $y = \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$.
Il dominio è $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

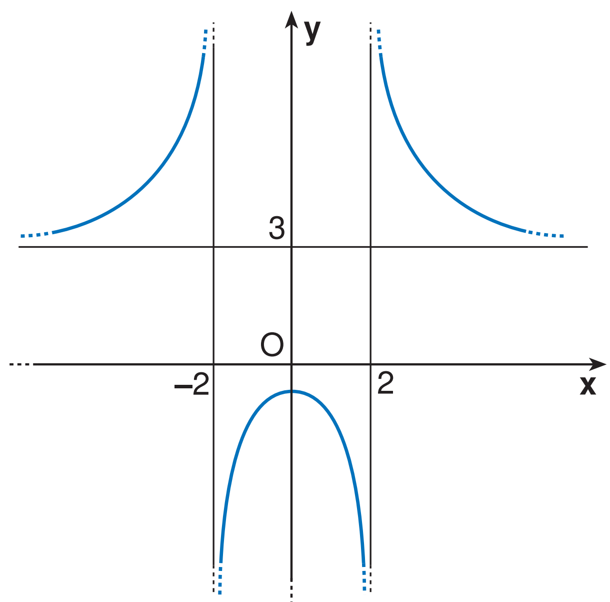
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = 3;$$

$$\lim_{x\to -2^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^\pm} \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \mp\infty;$$

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{3x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \pm\infty.$$

Abbiamo ottenuto un asintoto orizzontale di equazione $y = 3$ e due asintoti verticali di equazioni $x = -2$ e $x = 2$, come richiesto dal testo.

Riportiamo in figura il grafico della funzione studiata.



y
3
O
−2
2
x