SOLUZIONE DEL QUESITO 1

CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$ è nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Tutte le ipotesi della regola di De L'Hospital sono verificate, pertanto risulta:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{D\left(2^{3x}-3^{4x}\right)}{D\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln 2 \cdot 2^{3x} - 4\ln 3 \cdot 3^{4x}}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln 2 - 4\ln 3}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln 8 - \ln 81}{2x} = -\infty.$$

Se non si vuole applicare il teorema di De L'Hospital, si può scrivere la funzione di partenza come prodotto di due funzioni e poi procedere con il calcolo del limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \frac{2^{3x}-1+1-3^{4x}}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{2^{3x}-1}{x} - \frac{3^{4x}-1}{x}\right] = -\infty,$$

perché $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e, utilizzando il prodotto notevole $\lim_{x\to 0^+} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ per $a > 0$, $\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{2^{3x}-1}{x} - \frac{3^{4x}-1}{x}\right] = \ln 2^3 - \ln 3^4$.