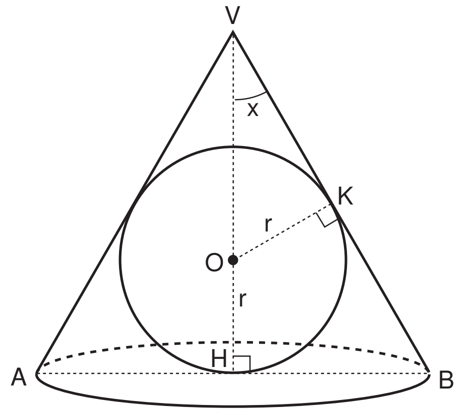
SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

Consideriamo la sfera di centro O, raggio $r = OK = OH$ e il cono circoscritto di vertice



V e raggo di base BH. Poniamo $x = H\widehat{V}B$ con $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Applichiamo al triangolo rettangolo VOK il teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria:

$$VO = \frac{OK}{\operatorname{sen} x} = \frac{r}{\operatorname{sen} x}.$$

Segue che

$$VH = VO + OH = \frac{r}{\operatorname{sen} x} + r = \frac{r(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}.$$

Analogamente, considerando il triangolo rettangolo VHB, si ricava:

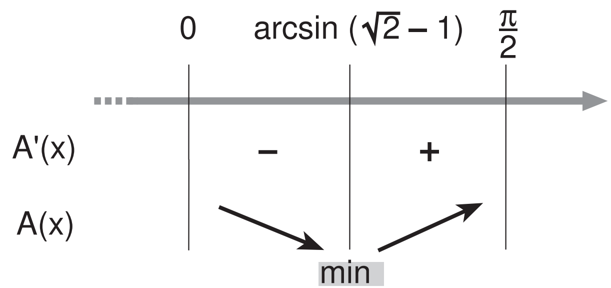
$$HB = VH \cdot \operatorname{tg} x = \frac{r(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{r(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x}.$$

Determiniamo l'area laterale $A(x)$ del cono, con $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$A(x) = \pi \cdot HB \cdot VB = \pi \cdot \frac{r(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x} \cdot \frac{r(1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{\pi r^2 (1 + \operatorname{sen} x)^2}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} = \frac{\pi r^2 (1 + \operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}.$$

Calcoliamo la derivata $A'(x)$ e studiamone il segno:

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x) - (1 + \operatorname{sen} x)(\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x)^2} = \\
&= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x - 1 + 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen}^2 x)}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x)^2} = \\
&= \pi r^2 \cdot \frac{\cos x(\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x - 1)}{(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x)^2}.
\end{aligned}$$



Nell'intervallo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ risulta $A'(x) > 0$ per $\sqrt{2} - 1 < \operatorname{sen} x < 1$, ovvero $\operatorname{arcsen}(\sqrt{2} - 1) < x < \frac{\pi}{2}$. La funzione $A(x)$ ha minimo per $x = \operatorname{arcsen}(\sqrt{2} - 1)$; in tal caso risulta

$$VO = \frac{r}{\sqrt{2} - 1} = r(\sqrt{2} + 1).$$

Ricaviamo VT ovvero la distanza dal vertice V dalla superficie sferica:

$$VT = VO - TO = r(\sqrt{2} + 1) - r = r\sqrt{2}.$$