SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

1. Chiamiamo C il punto $\left(0; \frac{3}{2}\right)$. Per facilitare lo studio dell'arco di parabola AC e della retta tangente in A, scriviamo l'equazione in forma esplicita:

$$x^2 = 9 - 6y \Rightarrow 6y = 9 - x^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}.$$

L'arco L è dunque il tratto di grafico della funzione $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, compreso tra $x = 0$ e $x = 3$.

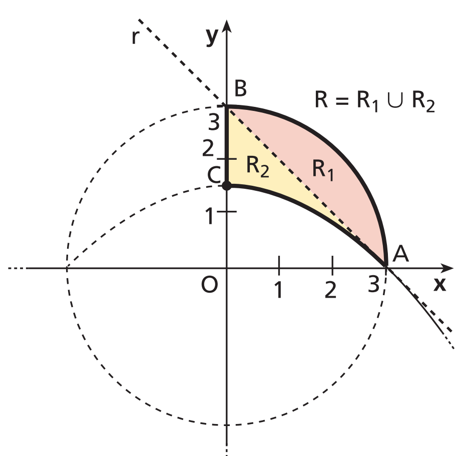
La retta tangente in A ha equazione $y = m(x - x_A) + y_A$, dove $x_A = 3$ e $y_A = 0$ sono le coordinate di A, e $m = p'(3)$ è la derivata di $p(x)$ calcolata in $x = 3$.

Calcoliamo la derivata della funzione $p(x)$:

$$p'(x) = -\frac{1}{6} \cdot 2x + 0 = -\frac{1}{3}x.$$

Poiché $p'(3) = -1$, la retta r ha equazione:

$$r : y = -1(x - 3) + 0 \quad \rightarrow \quad r : y = 3 - x.$$



Osserviamo che r passa anche per il punto B, quindi le due regioni in cui viene diviso R sono:

- il segmento circolare di estremi A e B del cerchio di centro O e raggio 3. Esso si può considerare come la differenza del settore circolare e del triangolo di estremi OAB. Il suo volume è allora:

$$A_{R_1} = A_{sett} - A_{triang} = \frac{1}{4}\pi 3^2 - \frac{1}{2}3^2 = \frac{9\pi - 18}{4};$$

- il triangolo curvilineo ABC, dato dalla differenza del triangolo OAB e la regione OAC compresa tra L e l'asse x (è la metà di un segmento parabolico). L'area di OAC è l'integrale definito di $p(x)$ di estremi 0 e 3:

$$A_{OAC} = \int_0^3 p(x)dx = \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = \left[-\frac{x^3}{18} + \frac{3}{2}x\right]_0^3 = -\frac{27}{18} + \frac{9}{2} = 3.$$

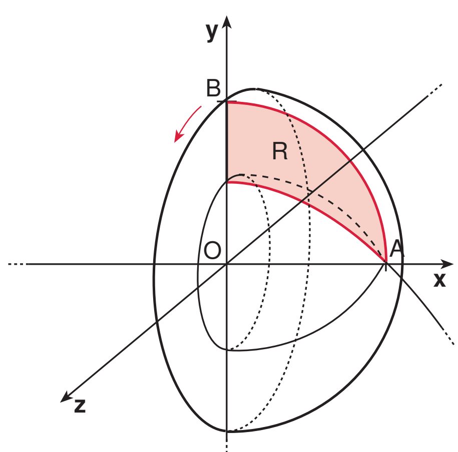
  Risulta dunque

$$A_{R_2} = A_{triang} - A_{OAC} = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$

2. Osserviamo che il volume di W non dipende in nessun modo dalla forma della regione R, ma solamente dalla funzione $S(x)$. Esso è dato dall'integrale definito di $S(x)$ di estremi 0 e 3:

$$V_W = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x} = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}e^{5-9} + \frac{1}{3}e^5 = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}.$$

3. Il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse x è la differenza tra una semisfera di centro O e raggio 3 e il solido $\mathcal{P}$ ottenuto dalla rotazione (sempre attorno all'asse x) della regione compresa tra L e l'asse x. Il volume della semisfera



è metà di quello della sfera:

$$V_{semisf} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi.$$

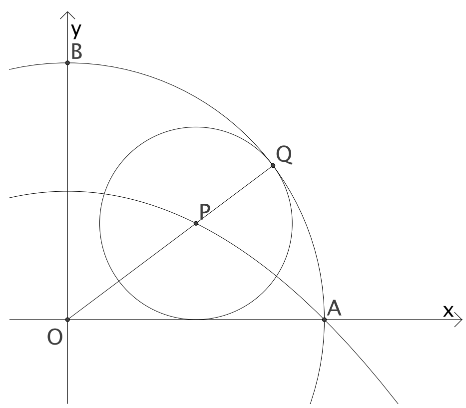
Il volume del solido $\mathcal{P}$ è dato dall'integrale:

$$V_{\mathcal{P}} = \pi \int_0^3 p(x)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{36} \int_0^3 \left(x^2 - 9\right)^2 dx =$$
$$= \frac{\pi}{36} \int_0^3 \left(x^4 - 18x^2 + 81\right) dx = \frac{\pi}{36} \left[\frac{x^5}{5} - 18 \cdot \frac{x^3}{3} + 81x\right]_0^3 =$$
$$= \frac{\pi}{36} \left(\frac{3^5}{5} - \frac{18 \cdot 3^3}{3} + 81 \cdot 3\right) = \frac{\pi}{36} \cdot 3^4 \left(\frac{3}{5} - 2 + 3\right) = \frac{9}{4}\pi \cdot \frac{8}{5} = \frac{18}{5}\pi.$$

Per ottenere il solido ottenuto dalla rotazione di R facciamo la sottrazione:

$$V = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{4}{5} \cdot 18\pi = \frac{72}{5}\pi.$$

4. Ricordiamo che affinché una circonferenza sia tangente internamente a un arco di circonferenza AB di centro O il suo centro deve appartenere al settore circolare OAB. Nel nostro caso, quindi, limitiamo lo studio al settore circolare AOB. Sia



$P(x; y)$ il generico punto del luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x. Una circonferenza di centro P è tangente all'arco AB se la somma della distanza di P dall'origine e del raggio PQ è uguale al raggio OQ. Quindi, dato che la circonferenza ha raggio y, otteniamo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + y = 3 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 3 - y.$$

Possiamo elevare entrambi i membri al quadrato poiché $3 - y$ è non negativo e si ottiene

$$x^2 = 9 - 6y,$$

che è proprio l'equazione che descrive il luogo L.

La circonferenza tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3 ha un asse di simmetria dato dalla retta $s : x = \frac{3}{2}$. Infatti la simmetria assiale di asse s porta la circonferenza di centro A in quella di centro O, e lascia invariato l'asse x. Il centro della circonferenza cercata appartiene alla retta s: è dunque il punto di coordinate $\left(\frac{3}{2}; p\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right)$. Il raggio è uguale a $\frac{9}{8}$.

