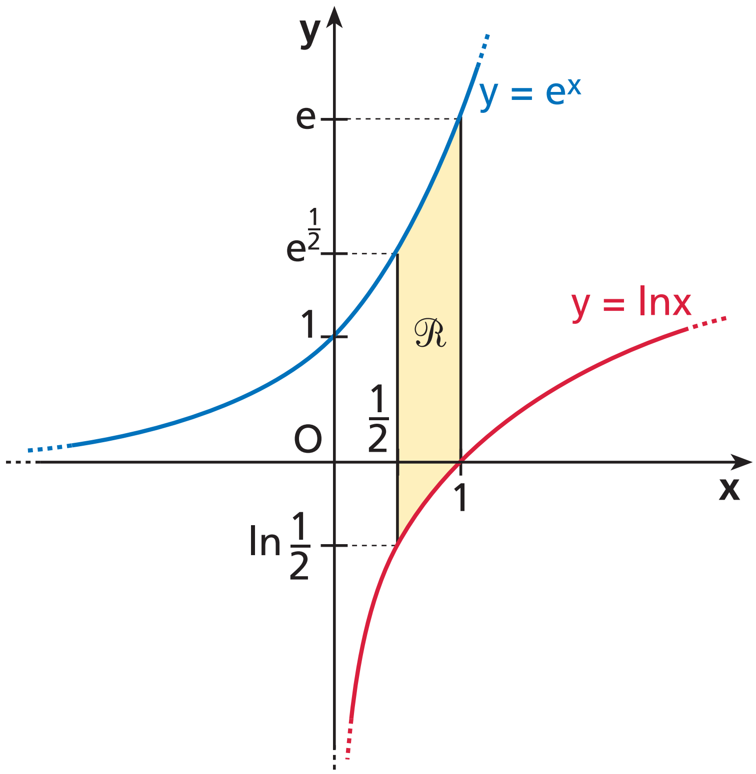
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2012

1. Rappresentiamo in figura i grafici delle funzioni f e g e la regione $\mathcal{R}$, la cui area è data da



$$A(\mathcal{R}) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} [f(x) - g(x)]\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (e^x - \ln x) dx$$
$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x\, dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\, dx$$

Proseguiamo calcolando l'integrale del logaritmo per parti

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{R}) &= \Big[e^x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left(\Big[x\,\ln x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,\frac{1}{x}\,dx\right) \\
&= e - \sqrt{e} - \Big(-\frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1}{2}\Big) + \Big[x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\
&= e - \sqrt{e} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

2. La regione $\mathcal{R}$ è divisa in due parti dall'asse x. Chiamiamo $\mathcal{R}_1$ la parte sovrastante l'asse x e $\mathcal{R}_2$ quella ad esso sottostante. Nella rotazione attorno all'asse x, il solido generato da $\mathcal{R}_2$ è contenuto nel solido generato dalla rotazione di $\mathcal{R}_1$, quindi possiamo ignorarlo. Otteniamo quindi

$$S = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x}\,dx$$

Nella rotazione attorno all'asse y, consideriamo separatamente T_1 il solido generato dalla rotazione di $\mathcal{R}_1$ e T_2 il solido generato dalla rotazione di $\mathcal{R}_2$.
Indichiamo con V_1 il volume del cilindro di raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza $\sqrt{e}$ e con V_2 il volume del solido generato dalla rotazione della regione di piano compresa tra l'asse y, la curva $y = f(x)$ e le rette di equazione $y = \sqrt{e}$ e $y = e$. Per calcolare il volume di T_1 sottraiamo al volume del cilindro di raggio di base 1 e altezza e il volume $V_1 + V_2$.
Per calcolare V_2 utilizziamo l'equazione della funzione inversa di f :

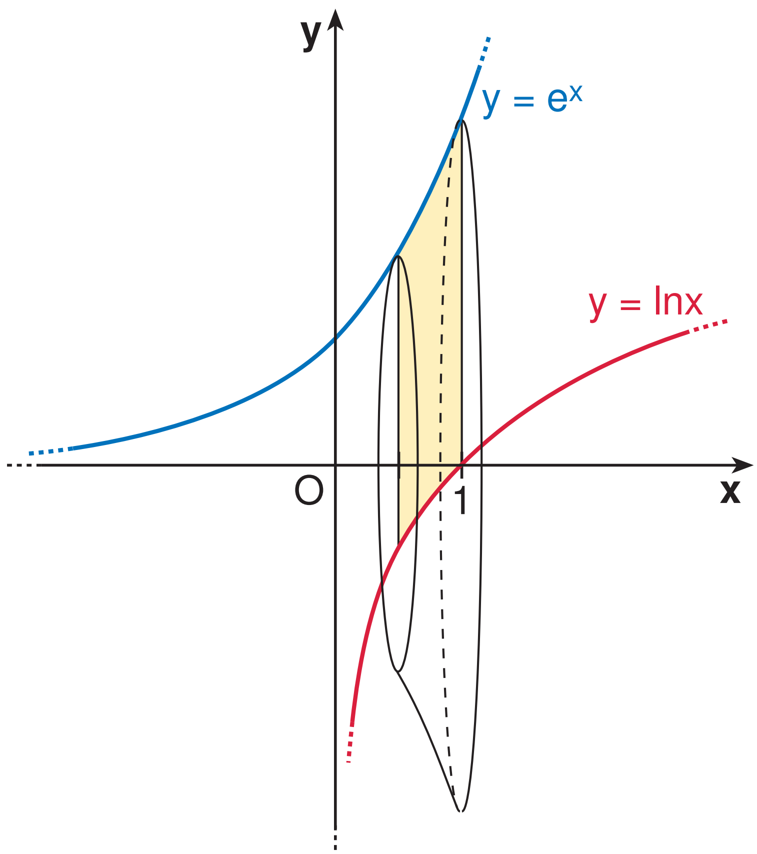
$$V_2 = \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 x\,dx.$$

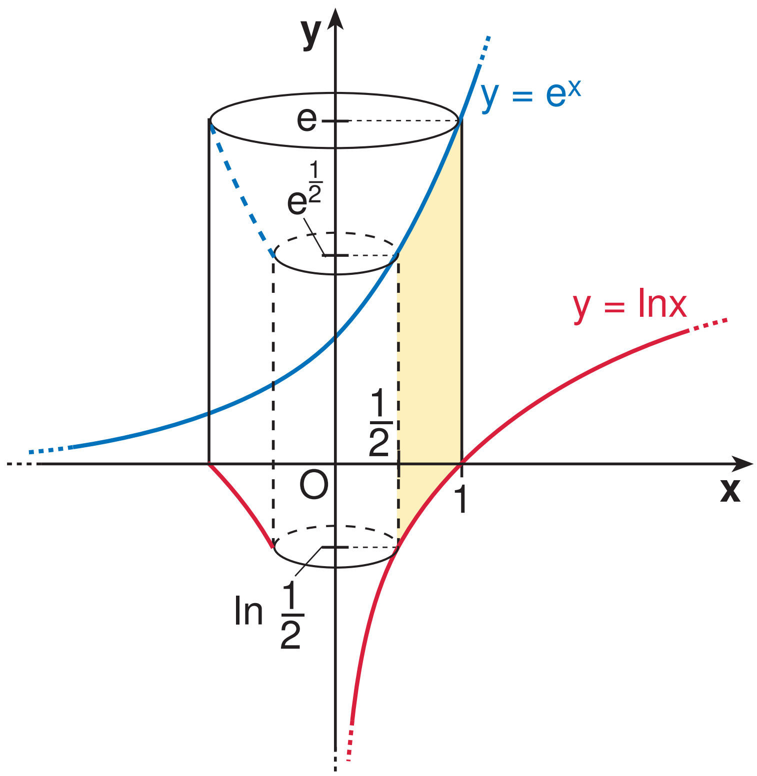
Otteniamo pertanto:

$$V(T_1) = \pi\,e - \frac{1}{4}\,\pi\,\sqrt{e} - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 x\,dx.$$

Per calcolare il volume di T_2 sottraiamo al volume del solido generato dalla rotazione della regione individuata dall'asse y, dalla curva $y = g(x)$, dall'asse x e dalla retta di equazione $y = \ln\frac{1}{2}$ il volume del cilindro di raggio di base $\frac{1}{2}$ e altezza $\left|\ln\frac{1}{2}\right|$. Quindi abbiamo:

$$
\begin{aligned}
V(T_2) &= \pi \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} e^{2x}\,dx - \frac{1}{4}\,\pi\left|\ln\frac{1}{2}\right| \\
&= \pi \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} e^{2x}\,dx - \frac{1}{4}\,\pi\ln 2.
\end{aligned}
$$


y
y = e^x
y = lnx
O
1
x



Pertanto il volume del solido T vale

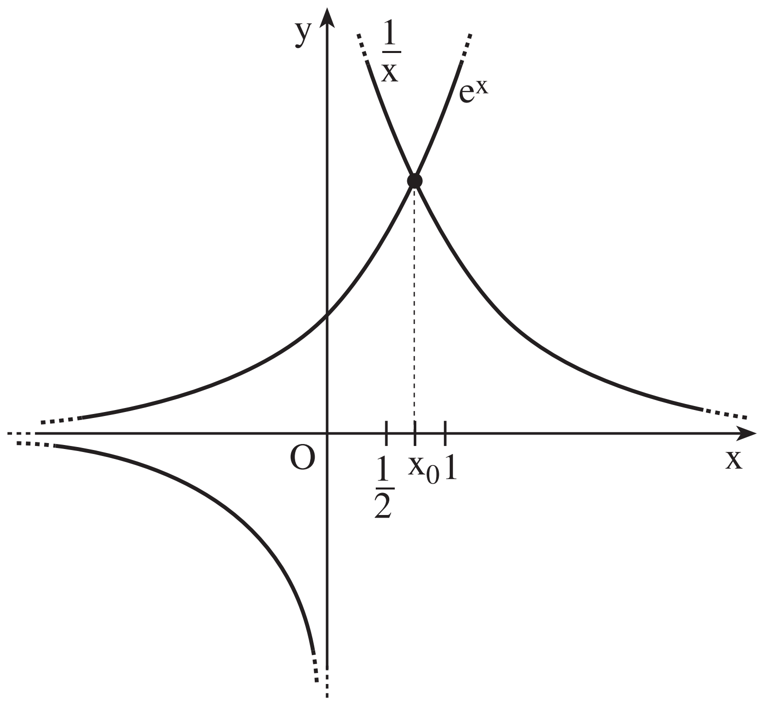
$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) =$$
$$= \pi\, e - \frac{1}{4}\,\pi\,\sqrt{e} - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} \ln^2 x\, dx + \pi \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} e^{2x}\, dx - \frac{1}{4}\,\pi \ln 2.$$

3. Dobbiamo dimostrare che esiste un solo valore $x_0 > 0$ tale che i coefficienti angolari delle rette tangenti ai grafici rispettivamente di f e di g, nei loro punti di ascissa x_0, sono uguali.

   Dobbiamo quindi provare che esiste un solo $x_0 > 0$ che verifica $f'(x) = g'(x)$, cioè $e^x = \frac{1}{x}$.

   Rappresentiamo in un unico piano cartesiano i grafici di $f'(x)$ e $g'(x)$ e osserviamo che vi è un unico punto di intersezione di ascissa positiva interna all'intervallo $[\frac{1}{2}; 1]$

   Poniamo $F(x) = e^x - \frac{1}{x}$ e determiniamo l'ascissa x_0 che annulla $F(x)$, con il metodo numerico di bisezione.



n	a_n	b_n	m_n	$F(a_n)$	$F(b_n)$	$F(m_n)$	ε_n
0	0,5	1	0,75	-0,351279	1,718282	0,783667	0,25
1	0,5	0,783667	0,641834	-0,351279	0,783667	0,341927	0,141834
2	0,5	0,641834	0,570917	-0,351279	0,341927	0,018321	0,070917
3	0,5	0,570917	0,535459	-0,351279	0,018321	-0,159325	0,035459
4	0,535459	0,570917	0,553188	-0,159325	0,018321	-0,068916	0,017729
5	0,553188	0,570917	0,562053	-0,068916	0,018321	-0,024922	0,008865

Pertanto la soluzione è $x_0 \simeq 0,56$.

4. La funzione $h(x)$ è definita e continua nell'intervallo limitato e chiuso $[\frac{1}{2}; 1]$ quindi, per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo assoluti.
   Per il punto precedente, nell'intervallo dato, la funzione ha un solo punto stazionario in $x_0 \simeq 0,56$.
   Confrontando il valore della funzione agli estremi dell'intervallo e nel punto stazionario otteniamo
$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \ln\frac{1}{2} \simeq 2,3419;$$
$$h(1) = e \simeq 2,7183;$$
$$h(x_0) \simeq 2,3305.$$

Quindi nell'intervallo $[\frac{1}{2}; 1]$, il punto di massimo assoluto è $x = 1$ e il punto di minimo assoluto è $x = x_0$.