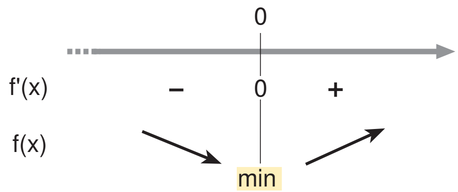
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2012

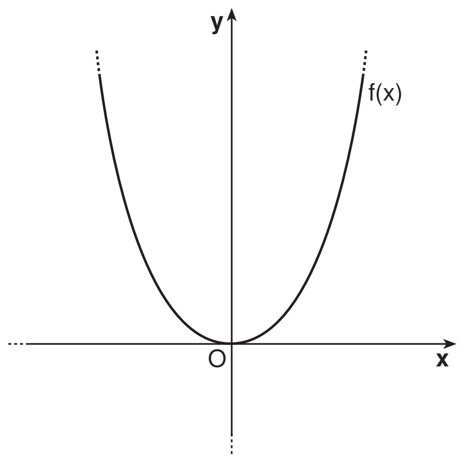
1. Il periodo T della funzione g è ottenuto uguagliando l'argomento di g a 2π, poiché 2π è il periodo della funzione $y = \operatorname{sen} x$. Pertanto il periodo di T vale:
$$\frac{3}{2}\pi T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{4}{3}.$$
Studiamo la funzione
$$f(x) = \left|27x^3\right| = \begin{cases} 27x^3, \text{ se } x \geq 0 \\ -27x^3, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Simmetrie: $f(-x) = f(x)$, ossia la funzione è pari e il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
- Intersezione con gli assi cartesiani:
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = |27x^3| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$
- Segno della funzione:
$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left|27x^3\right| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:
$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -81x^2, \text{ se } x < 0 \end{cases},$$
$$f''(x) = \begin{cases} 162x, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -162x, \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$
Osserviamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 0$, quindi $(0; 0)$ è un punto di minimo per $f(x)$ e la funzione è crescente in $[0; +\infty[$ e decrescente in $]-\infty; 0]$.

Osserviamo che $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi la funzione è convessa.

© 2012 Zanichelli Editore





Studiamo la funzione $g(x) = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$.

- Dominio: $\mathbb{R}$.
- Intersezione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}k \\ y = 0 \end{cases}, \text{ per ogni } k \text{ intero.}$$

- Calcolo e segno delle derivate prima e seconda:

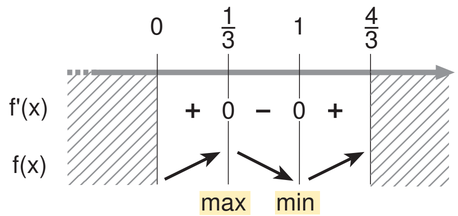
  Per ogni $x \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$g'(x) = \frac{3}{2}\pi \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right);$$
$$g''(x) = -\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

  Per $x \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ vale:

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{3}{2}\pi x \leq \frac{\pi}{2} \vee \frac{3}{2}\pi \leq \frac{3}{2}\pi x \leq 2\pi$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \vee 1 \leq x \leq \frac{4}{3}\pi.$$

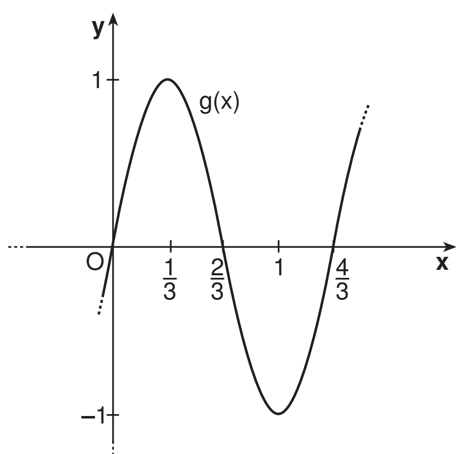
 © 2012 Zanichelli Editore



Pertanto la funzione ha massimi in $\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}k;1\right)$ per ogni intero k e minimi in $\left(1+\frac{4}{3}k;-1\right)$ per ogni intero k. Osserviamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, vale

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)=0 \rightarrow x=\frac{2}{3}k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto la funzione ha flessi in $\left(\frac{2}{3}k;0\right)$ per ogni intero k.



2. In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un generico punto $(x_0;y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y, ha equazione:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

Nel punto $x_0=\frac{1}{3}$, risulta $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right)=9$ e la retta r tangente a G_f nel punto $\left(\frac{1}{3};1\right)$ ha equazione:

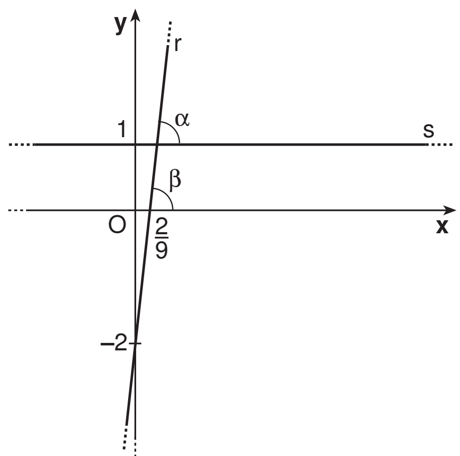
$$y-1=9\left(x-\frac{1}{3}\right) \rightarrow y=9x-2.$$

 © 2012 Zanichelli Editore

Nel punto $x_0 = \frac{1}{3}$, risulta $g\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $g'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ e la retta s tangente a G_g nel punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ ha equazione:

$$y - 1 = 0 \rightarrow y = 1.$$

Per determinare l'ampiezza dell'angolo acuto α formato da r e da s osserviamo che α è congruente all'angolo β formato dalla retta r e dall'asse delle x e quindi $\text{tg}(\beta)$ corrisponde al coefficiente angolare della retta r. Pertanto l'angolo α vale:



$$\alpha = \beta = \text{arctg}(9) = 1,46\,\text{rad} = 83°40'.$$

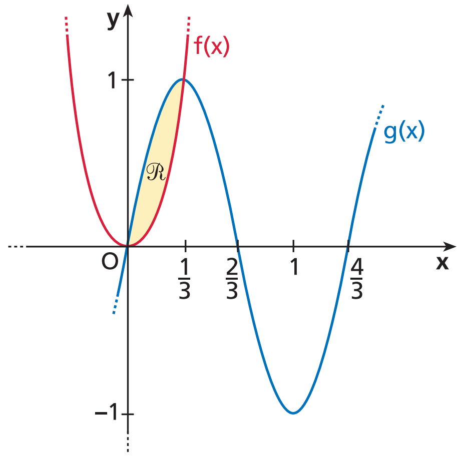
3. L'intersezione dei grafici G_f e G_g è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = 1 \end{cases}.$$

Osserviamo inoltre che vale la disuguaglianza $27x^3 < \text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ per $x \in \left]0; \frac{1}{3}\right[$. L'area della regione R è data da:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\text{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right) dx = \\ &= \left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27\frac{x^4}{4}\right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

© 2012 Zanichelli Editore



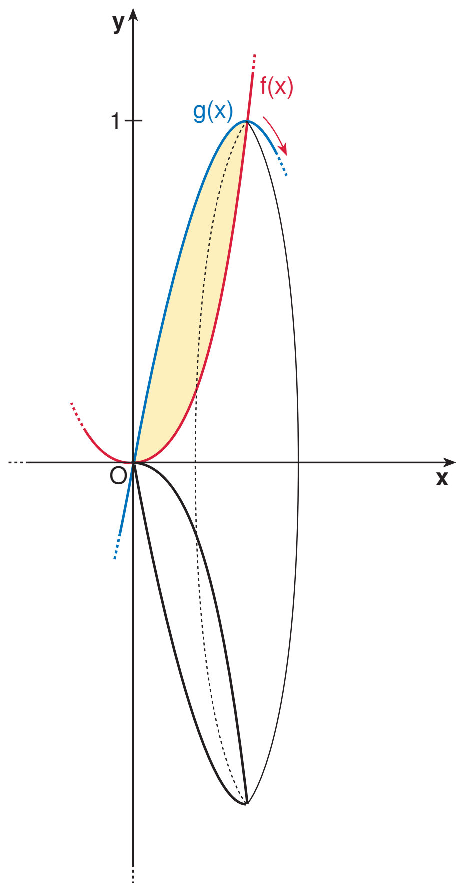
4. Il volume S del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle x può essere ottenuto come differenza tra il volume V_1 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x, e il volume V_2 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse x attorno all'asse x. Pertanto il volume S vale:

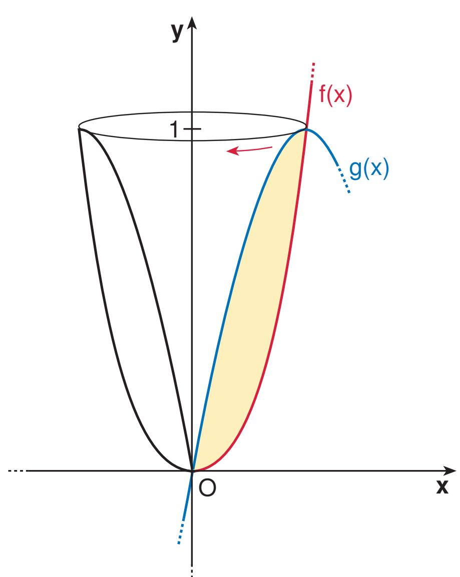
$$S = V_1 - V_2 = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right)^2 dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(27x^3\right)^2 dx =$$
$$= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\left(\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)\right)^2 - \left(27x^3\right)^2\right) dx.$$

Il volume T del solido generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse delle y può essere ottenuto come differenza tra il volume V_3 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = 27x^3$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y, e il volume V_4 del solido generato dalla rotazione della parte di piano delimitata dalla curva $y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse y attorno all'asse y. Poiché il volume V_3 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_3 = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)^2 dx.$$

 © 2012 Zanichelli Editore





 © 2012 Zanichelli Editore

Poiché il volume V_4 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = \dfrac{2}{3\pi}\,\mathrm{arcsen}\, x$, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = 1$, si trova:

$$V_4 = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arcsen}\, x\right)^2 dx.$$

Osservando che $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{arcsen}(x) < \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$, abbiamo

$$\begin{aligned} T = V_3 - V_4 &= \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)^2 dx - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arcsen}\, x\right)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^1 \left(\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x}\right)^2 - \left(\frac{2}{3\pi}\,\mathrm{arcsen}\, x\right)^2\right) dx. \end{aligned}$$

© 2012 Zanichelli Editore