SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2012

1. I punti di flesso sono definiti come i punti in cui la derivata seconda si annulla.

   Poichè il grafico mostrato è il grafico della derivata prima di f, possiamo considerare la retta tangente al grafico di f'

   $$y - f'(x_0) = f''(x_0) \cdot (x - x_0)$$

   in ogni punto delll'intervallo $[0; 6]$.

   I punti di flesso perciò sono i punti in cui il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f' è zero, ovvero i punti in cui la tangente al grafico di f' è orizzontale (e in cui la derivata non cambia segno). Le ascisse di tali punti sono $x = 2$ e $x = 4$.

2. Essendo f una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass, essa ha massimo e minimo assoluti.

   Poichè una funzione derivabile è monotona crescente negli intervalli in cui $f' > 0$ e decrescente dove $f' < 0$ (tranne al più in punti isolati), deduciamo dal grafico che la funzione è monotona decrescente nell'intervallo $]0; 5[$ e monotona crescente nell'intervallo $]5; 6[$. Pertanto, f assume il suo minimo in $x = 5$, e $f(5) = 3$.

   Per determinare il massimo assoluto, osserviamo che la funzione ha due massimi relativi in $x = 0$ e $x = 6$. Sappiamo che $f(0) = 9$. Per determinare il valore $f(6)$, usiamo il teorema fondamentale del calcolo integrale, che afferma che, essendo f' continua,

   $$\int_0^6 f'(x)dx = f(6) - f(0)$$

   cioè

   $$f(6) = f(0) - 5 = 4.$$

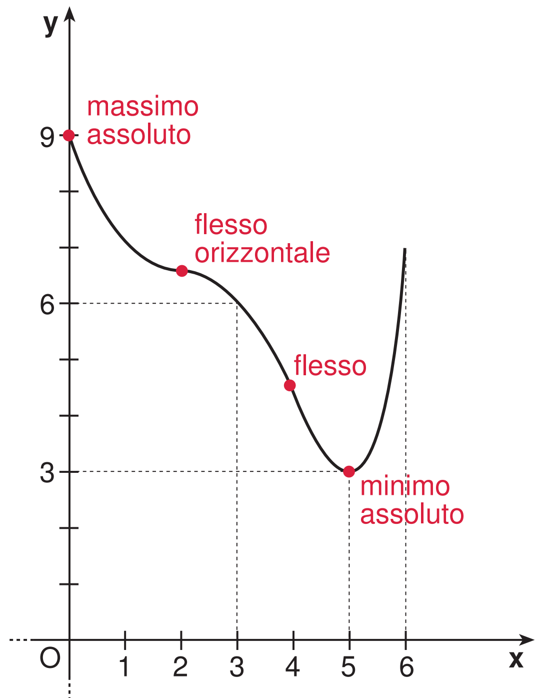
   Quindi il massimo assoluto è assunto nel punto $x = 0$ e $f(0) = 9$.

3. Sappiamo che:

   - f decresce strettamente su $[0; 5]$;
   - f ha un flesso orizzontale in $x = 2$;

- f ha un minimo in $x = 5$;
- f è sempre positiva.

Quindi il grafico di $f(x)$ è il seguente.



4. In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ in un generico punto $(x_0; y_0)$, se esiste e non è parallela all'asse y, ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Nel punto $x_0 = 3$, risulta $f(3) = 6$, $f'(3) = -1$, $g(3) = 3 \cdot f(3) = 18$. Poiché $g'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$ vale $g'(3) = 6 + 3 \cdot (-1) = 3$. Pertanto la retta tangente a G_f nel punto $x = 3$ ha equazione:

$$y - 6 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 9,$$

mentre la retta tangente a G_g nel punto $x = 3$ ha equazione:

$$y - 18 = 3(x - 3) \rightarrow y = 3x + 9.$$

Determiniamo la misura dell'angolo acuto α formato dalle due rette tangenti sapendo che

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'},$$

dove m e m' sono i coefficienti angolari delle due rette tangenti. Pertanto l'angolo α vale

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{m - m'}{1 + mm'} = \operatorname{arctg} \frac{-1-3}{1-3} = \operatorname{arctg} 2 \simeq 63^{\circ}26'.$$