

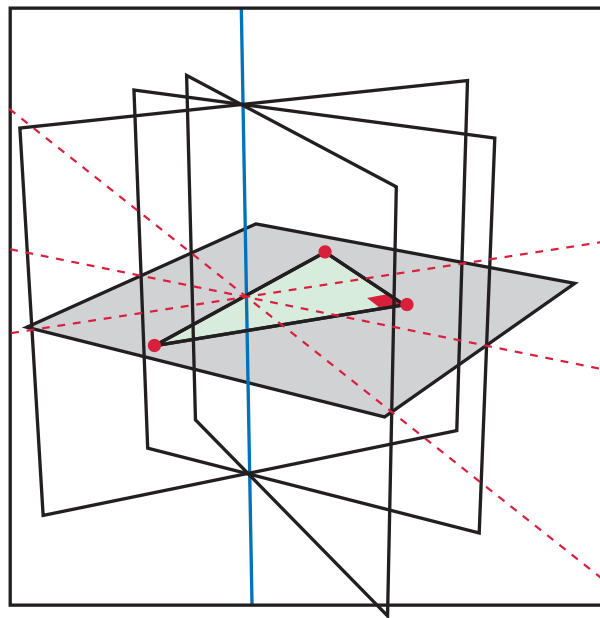
**SOLUZIONE DEL QUESITO 9**  
**CORSO DI ORDINAMENTO 2011**

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

*Metodo sintetico.*

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati  $A$  e  $B$  è il *piano assiale* del segmento  $AB$ , ovvero il piano perpendicolare ad  $AB$  passante per il punto medio di  $AB$ .

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano  $\pi$  contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo  $\alpha$  piano assiale del lato  $a$  e  $\beta$  piano assiale del lato  $b$ , allora  $\alpha$  e  $\beta$  sono perpendicolari a  $\pi$ , e le loro intersezioni con  $\pi$  sono gli assi di  $a$  e  $b$ . L'intersezione di  $\alpha$  e  $\beta$  è dunque una retta perpendicolare a  $\pi$ , passante per il circocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che il circocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

*Metodo analitico*

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ . Sia  $P(x; y; z)$  un generico punto dello spazio. La condizione  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$  equivale alle equazioni:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y - b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2} \\ y = \frac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo,  $z = 0$ , e passante per il punto  $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; 0\right)$ , che è il punto medio di  $AB$ .