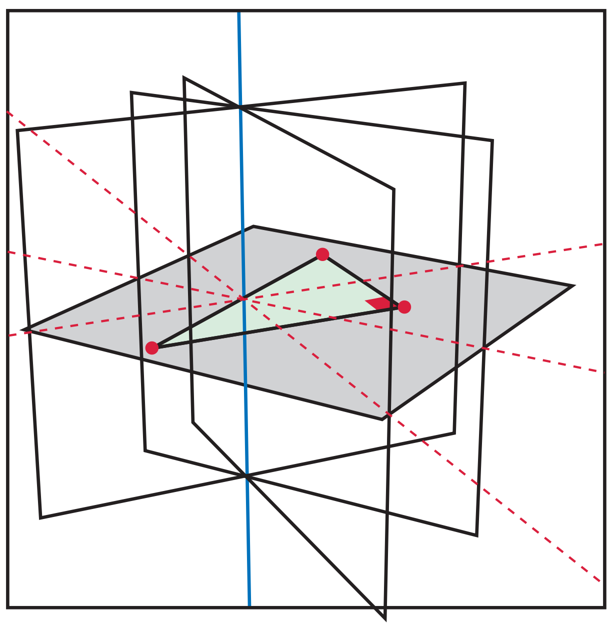
SOLUZIONE DEL QUESITO 9
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Proponiamo due metodi, il primo di geometria euclidea (sintetica) e il secondo di geometria analitica.

*Metodo sintetico.*

Ricordiamo che il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti dati $A$ e $B$ è il *piano assiale* del segmento $AB$, ovvero il piano perpendicolare ad $AB$ passante per il punto medio di $AB$.

Da ciò segue che il luogo cercato è l'intersezione dei piani assiali dei tre lati del triangolo. Tali piani si intersecano in effetti in una retta perpendicolare al piano $\pi$ contenente il triangolo.



Prendiamo infatti due qualunque di tali piani assiali, diciamo $\alpha$ piano assiale del lato $a$ e $\beta$ piano assiale del lato $b$, allora $\alpha$ e $\beta$ sono perpendicolari a $\pi$, e le loro intersezioni con $\pi$ sono gli assi di $a$ e $b$. L'intersezione di $\alpha$ e $\beta$ è dunque una retta perpendicolare a $\pi$, passante per l'ortocentro del triangolo.

Ricordiamo infine che l'ortocentro di un triangolo rettangolo è il punto medio dell'ipotenusa.

*Metodo analitico*

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane nello spazio, in modo che i vertici del triangolo rettangolo siano i punti $O(0; 0; 0)$, $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$. Sia $P(x; y; z)$ un generico punto dello spazio. La condizione $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{OP}$ equivale alle equazioni:

$$(x-a)^2 + y^2 + z^2 = a^2 + (y-b)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Semplificando, si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

che sono quelle della retta perpendicolare al piano del triangolo, $z = 0$, e passante per il punto $\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}; 0\right)$, che è il punto medio di $AB$.