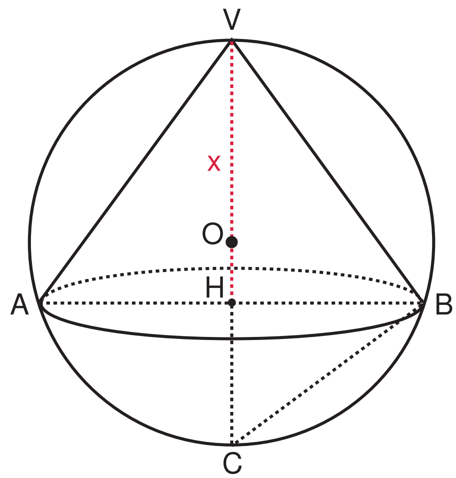
SOLUZIONE DEL QUESITO 6
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo il solido di cui si chiede il volume:



Dato un cono inscritto nella sfera di centro O e raggio 10 cm, indichiamo con x l'altezza VH del cono (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{VH} = x$, $0 < x < 20$.

Applicando i teoremi di Euclide al triangolo rettangolo VCB, otteniamo:

$$\overline{VB} = \sqrt{\overline{VC} \cdot \overline{VH}} \quad \Rightarrow \quad \overline{VB} = \sqrt{20x},$$

$$\overline{HB} = \sqrt{\overline{VH} \cdot \overline{HC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{HB} = \sqrt{x(20-x)}.$$

Troviamo la superficie laterale del cono:

$$S_l = \frac{2\pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}}{2} = \pi \cdot \overline{HB} \cdot \overline{VB}.$$

Sostituiamo le espressioni precedenti:

$$S_l(x) = \pi\sqrt{x(20-x)} \cdot \sqrt{20x} = \pi\sqrt{400x^2 - 20x^3} = 20\pi\sqrt{x^2 - \frac{x^3}{20}}, \ 0 < x < 20.$$

Studiamo la derivata prima della funzione $S_l(x)$ e il suo segno:

$$S_l'(x) = 10\pi \frac{2x - \frac{3}{20}x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{x^3}{20}}}.$$

$$
\begin{aligned}
&S_l'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < \frac{40}{3},\\
&S_l'(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{40}{3} < x < 20,\\
&S_l'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{40}{3}.
\end{aligned}
$$

Pertanto la funzione $S_l(x)$ ha massimo in $x = \frac{40}{3}$, ovvero quando l'altezza è pari a $\overline{VH} = \frac{40}{3}$ cm.