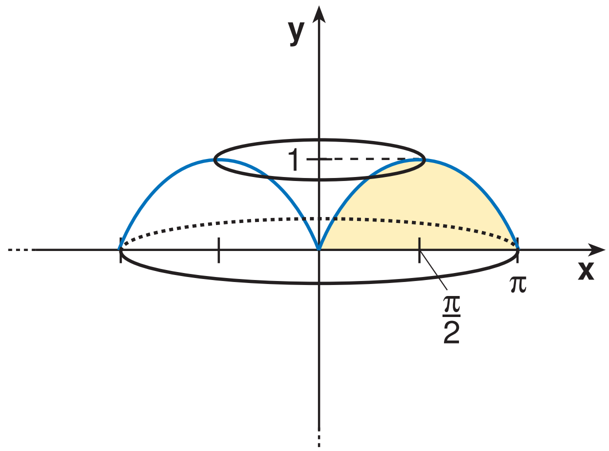
SOLUZIONE DEL QUESITO 3
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

Rappresentiamo la regione R e il solido W.



Consideriamo le funzioni:

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{nel dominio } \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$g(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{nel dominio } \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Il codominio di entrambe le funzioni è l'intervallo $[0; 1]$.

Il solido W è la differenza dei due solidi delimitati dalle superfici di rotazione generate dai grafici di f e di g attorno all'asse y.

Entrambe le funzioni f e g sono invertibili, e occorre esplicitare le loro funzioni inverse poiché, per calcolare i volumi, occorrerà integrare rispetto ad y.

Per fare questo, occorre ricordare che le soluzioni con $x \in [0; \pi]$ dell'equazione $\operatorname{sen} x = y$ (con $y \in [0; 1]$) sono $x_1 = \operatorname{arcsen} y$ e $x_2 = \pi - \operatorname{arcsen} y$. Dunque:

$$f^{-1}(y) = \operatorname{arcsen} y, \qquad g^{-1}(y) = \pi - \operatorname{arcsen} y.$$

Passiamo ora al calcolo del volume:

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^1 (\pi - \operatorname{arcsen} y)^2 dy - \pi \int_0^1 \operatorname{arcsen}^2 y \, dy = \\ &= \pi \int_0^1 \left[(\pi - \operatorname{arcsen} y)^2 - \operatorname{arcsen}^2 y\right] dy = \\ &= \pi \int_0^1 (\pi^2 - 2\pi \operatorname{arcsen} y) \, dy. \end{aligned}$$

© 2011 Zanichelli Editore

L'integrale $\int_0^1 \operatorname{arcsen} y \, dy$ può essere calcolato per parti:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 1 \cdot \operatorname{arcsen} y \, dy &= [\, y \operatorname{arcsen} y]_0^1 - \int_0^1 y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \, dy = \\
&= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \int_0^1 (-2y) \cdot (1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \, dy = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \left[2(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Tornando all'integrale per il calcolo del volume:

$$\begin{aligned}
V_W &= \pi \left(\int_0^1 \pi^2 dy - 2\pi \int_0^1 \operatorname{arcsen} y \, dy \right) = \\
&= \pi \left[\pi^2 - 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = \\
&= \pi^3 - \pi^3 + 2\pi^2 = 2\pi^2.
\end{aligned}$$

Il volume del solido è dunque $2\pi^2$.

© 2011 Zanichelli Editore