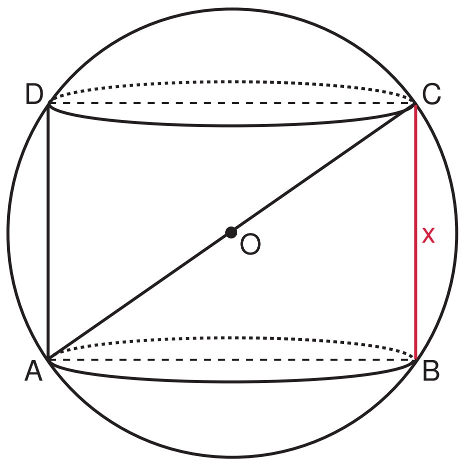
SOLUZIONE DEL QUESITO 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2011



E' dato un cilindro inscritto in una sfera di raggio $AO = 60$ cm. Indichiamo con x l'altezza BC (omettiamo per comodità l'unità di misura): $\overline{BC} = x$, $0 < x < 120$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{AB}^2 = 120^2 - x^2.$$

Determiniamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V = \pi \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4} \cdot \overline{CB} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \pi \cdot \frac{14400 - x^2}{4} \cdot x$$

$$V(x) = \frac{\pi}{4}(14400x - x^3), \quad 0 < x < 120.$$

Ricaviamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno:

$$V'(x) = \frac{\pi}{4}(14400 - 3x^2) \quad \Rightarrow \quad V'(x) = \frac{3}{4}\pi(4800 - x^2),$$

$$\begin{aligned} &V'(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 40\sqrt{3}, \\ &V'(x) < 0 \quad \text{per} \quad 40\sqrt{3} < x < 120, \\ &V'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 40\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $V(x)$ ammette massimo per $x = 40\sqrt{3}$.

In $x = 40\sqrt{3}$, si ricava:

$$V_{\max} = V(40\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}(14400 \cdot 40\sqrt{3} - 64000 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \cdot 384000 = 96000\pi\sqrt{3}.$$

Introduciamo ora l'unità di misura. Si ha:

$$V_{\max} = 96000\pi\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3.$$

Poiché $1\,\mathrm{cm}^3 = 10^{-3}\,\mathrm{l}$, la capacità in litri del serbatoio risulta:

$$V_{\max} = 96\pi\sqrt{3}\,\mathrm{l} \simeq 522,37\,\mathrm{l}.$$