SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Sostituiamo il valore $x = 0$ nell'espressione di $f(x)$, che sarà, quindi:

$$be^0 + 3 = 2 \;\Rightarrow\; b = -1.$$

Quindi

$$f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

Imponiamo che la funzione ammetta un massimo nel punto di ascissa 4:

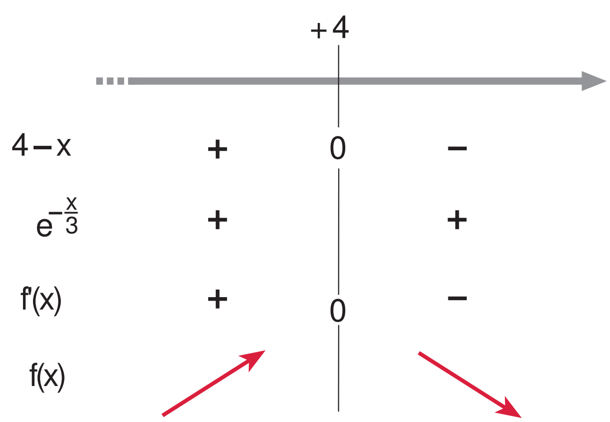
$$\begin{cases} f'(x) = \left(-\dfrac{a}{3}x + \dfrac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{x}{3}} \\ f'(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{4}{3}x + \frac{1}{3} + a\right) e^{-\frac{4}{3}} = 0$$

cioè $a = 1$.

Pertanto

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}\right) e^{-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}(4 - x)e^{-\frac{x}{3}}$$

da cui deduciamo il seguente quadro relativo al segno di $f'(x)$:



Il valore $x = 4$ è effettivamente quello in corrispondenza del massimo relativo richiesto.

In definitiva, la funzione f è pari a

$$f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3.$$

2. Studio della funzione $f(x)$.

   - Il dominio è $\mathbb{R}$.
   - Non esistono simmetria del grafico Γ di $y = f(x)$.
   - Dato che non si possono determinare per via analitica le eventuali intersezioni con l'asse x, dedurremo la loro posizione e il loro valore dallo studio dei limiti e delle derivate della funzione.

     Ricordiamo solo l'intersezione con l'asse y già nota: $(0; 2)$.
   - Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Cerchiamo gli asintoti orizzontali e obliqui. Osserviamo subito che il primo termine del limite:

     $$\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right]$$

     si presenta come una forma indeterminata del tipo $+\infty \cdot 0$, che si può risolvere utilizzando il teorema di de L'Hospital.

     $$\lim_{x\to+\infty}\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right] = 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^{\frac{x}{3}}} = 3 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}} = 3$$

     Quindi $y = 3$ è asintoto orizzontale destro.

     Ora, poiché

     $$\lim_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{3}} = +\infty,$$

     si ha

     $$\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3\right] = -\infty$$

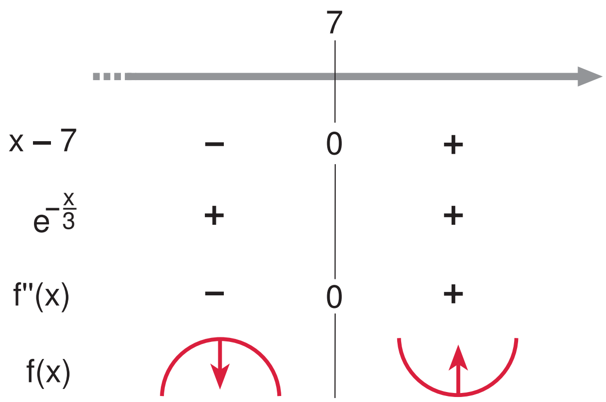
     e

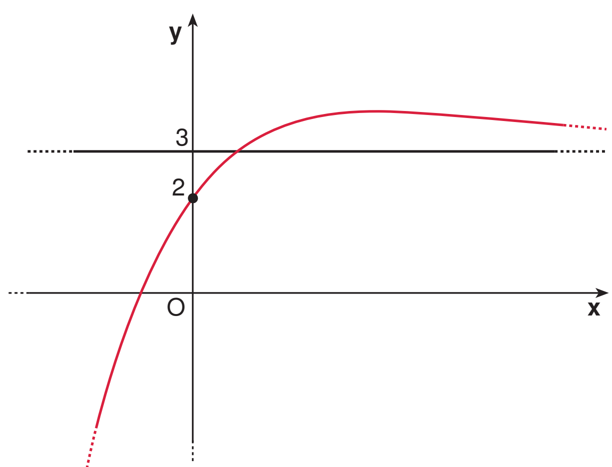
     $$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3}{x} == \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{(x-1)e^{-\frac{x}{3}}}{x}+\frac{3}{x}\right] = +\infty.$$

     Quindi non esistono né asintoto orizzontale né asintoto obliquo sinistro.
   - Studio della derivata prima. Essa è stata già studiata nel punto 1: la funzione è crescente nell'intervallo $]-\infty; -4[$ e presenta un massimo assoluto nel punto di ascissa $x = +4$ di coordinate $\left(4; 3\,e^{-\frac{4}{3}+3}\right)$.
   - Studio della derivata seconda:

     $$f''(x) = \frac{1}{9}(x-7)e^{-\frac{4}{3}}.$$

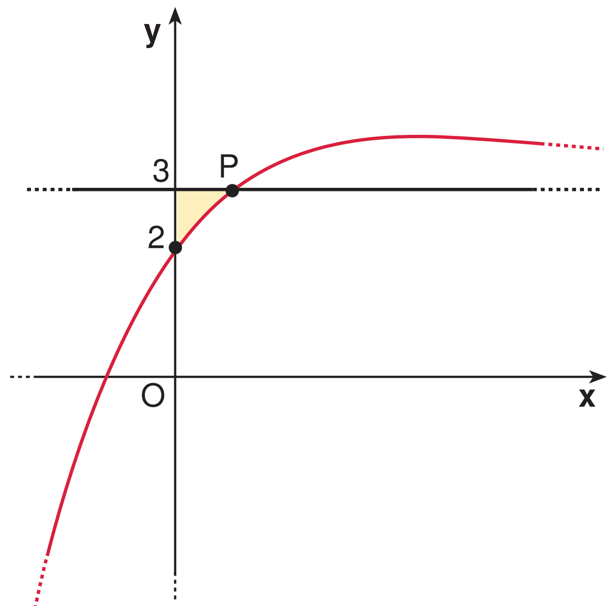
     Studiamo il suo segno. Perciò la funzione volge la concavità verso l'alto per $x > 7$ e presenta un flesso nel punto di coordinate $\left(7; 6\,e^{-\frac{7}{3}+3}\right)$.


7
x − 7
−
0
+
$e^{-\frac{x}{3}}$
+
+
f''(x)
−
0
+
f(x)


y
3
2
O
x

- Grafico Γ di $y = f(x)$: Osserviamo che dal grafico si può dedurre l'esistenza di un'unica intersezione tra il grafico e l'asse x, di scissa compresa tra i valori $x = -2$ e $x = -1$.

3. Individuiamo la regione di piano indicata.



Cerchiamo il punto P, intersezione tra la funzione $y = f(x)$ e la retta $y = 3$.

$$\begin{cases} y = (x-1)\,e^{-\frac{x}{3}} + 3 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-1)\,e^{-\frac{x}{3}} = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Il punto P ha coordinate $(1; 3)$.

L'area della regione assegnata vale:

$$\begin{aligned} \int_0^1 [3 - f(x)]\,dx &= \int_0^1 \left[3 - (x-1)\,e^{-\frac{x}{3}} - 3\right] dx = \\ &= -\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}\,dx + \int_0^1 e^{-\frac{x}{3}}\,dx = \\ &= -\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}\,dx + \left[-3\,e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1 = \\ &= -\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}\,dx - 3\,e^{-\frac{1}{3}} + 3. \end{aligned}$$

Il primo integrale si calcola per parti, ricordando la formula

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)dx = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, g(x)dx$$

e assumenod $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-\frac{1}{3}}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-\frac{x}{3}}dx &= \left[-3xe^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1 + 3\int_0^1 e^{-\frac{x}{3}}dx = \\ &= -3e^{-\frac{1}{3}} - 9\left[e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^1 = \\ &= 9 - 12\, e^{-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

Quindi l'area cercata vale:

$$-9 + 12\, e^{-\frac{1}{3}} - 3\, e^{-\frac{1}{3}} + 3 = 9\, e^{-\frac{1}{3}} - 6.$$

4. Riportiamo la tabella fornita completandola con il calcolo dei valori di $f(x_i)$ e $|f(x_i) - y_i|$ (questi ultimi arrotondati alla terza cifra decimale):

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65
$f(x_i)$	2	3	$e^{-\frac{2}{3}} + 3$	$2e^{-1} + 3$	$3e^{-\frac{4}{3}} + 3$	$4e^{-\frac{5}{3}} + 3$	$5e^{-2} + 3$
$\lvert f(x_i) - y_i\rvert$	0,030	0,020	$\simeq 0,023$	$\simeq 0,026$	$\simeq 0,009$	$\simeq 0,004$	$\simeq 0,027$

La funzione f è accettabil erelativamente ai dati forniti. Tuttavia, nonostante f assuma valori maggiori di 3 per $x \geq 2$, non possiamo affermare che l'evoluzione del fenomeno porterà a profitti non inferiori a 3 milioni di euro. Infatti se consideriamo, per esempio, $x = 20$ (cioè i dati relativi all'anno 2024),

$$f(20) = 19\, e^{-\frac{20}{3}}$$

e ricordiamo che $|f(20) - y_{20}| \leq 10^{-1}$, allora

$$f(20) - 10^{-1} \leq y_{20} \leq f(20) + 10^{-1}$$

che arrotondato alla terza cifra decimale, risulta

$$2,924 \leq y_{20} \leq 3,124.$$

Non abbiamo nessuna garanzia che y_{20} sia non inferiore a 3 milioni di euro.