SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

- $D_f = \mathbb{R}$.
- Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

$$f(-x) = -f(x)\,.$$

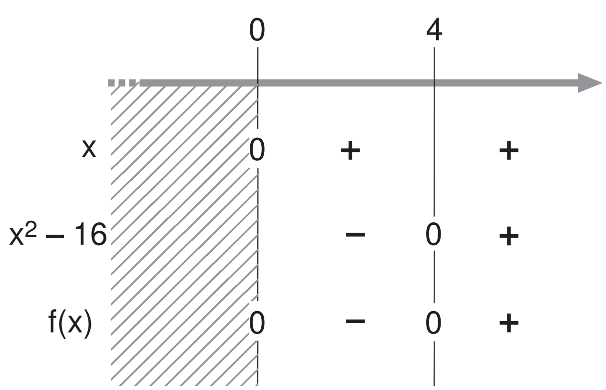
Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O.

- Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 16x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2 - 16) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 4 \end{cases}$$

Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x: $A_1(-4;0), A_2(0;0), A_3(4;0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y.

- Positività: $x(x^2 - 16) > 0$:



Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 4$.

- Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

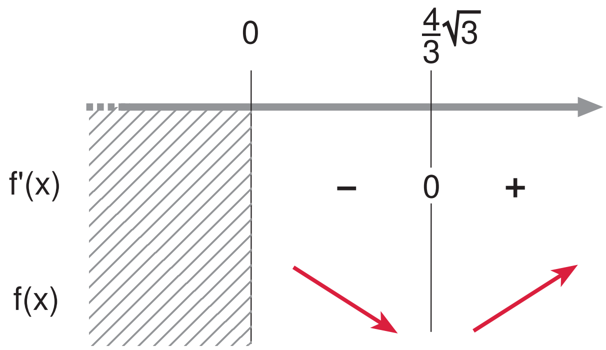
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,,$$

non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

- Derivata prima:

$$f'(x) = 3x^2 - 16\,.$$

Studio del segno di $f'(x)$:



Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:

$$f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{64\sqrt{3}}{9} - \frac{64\sqrt{3}}{3} = -\frac{128\sqrt{3}}{9}\,.$$

Quindi il punto di minimo relativo è

$$M_1\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}; -\frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

e per simmetria il punto

$$M_2\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}; \frac{128\sqrt{3}}{9}\right)$$

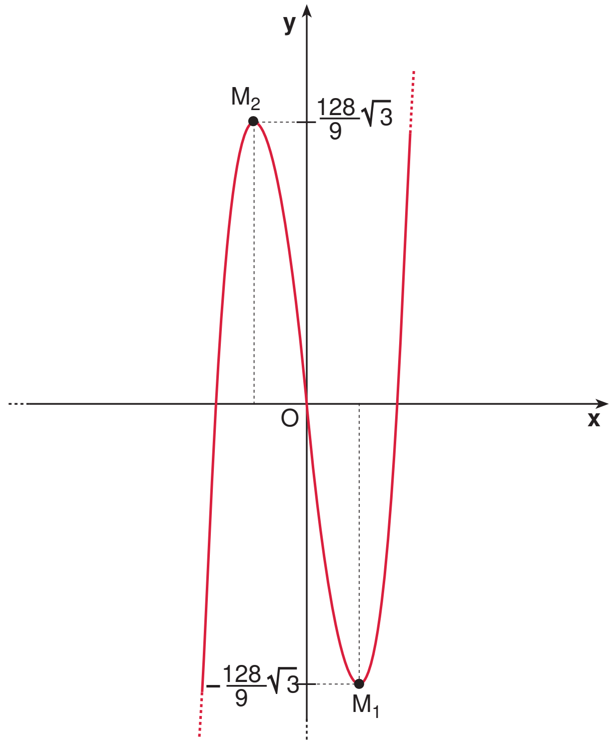
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:

$$f''(x) = 6x\,.$$

Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0;0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:



Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \operatorname{sen} x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(4; 0)$.

I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-5\pi; 5\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale del grafico G_g di $y = g(x)$ compresi nell'intervallo $[-10; 10]$ sono:

$$\left(2k+1; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -5 \leq k \leq 4\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

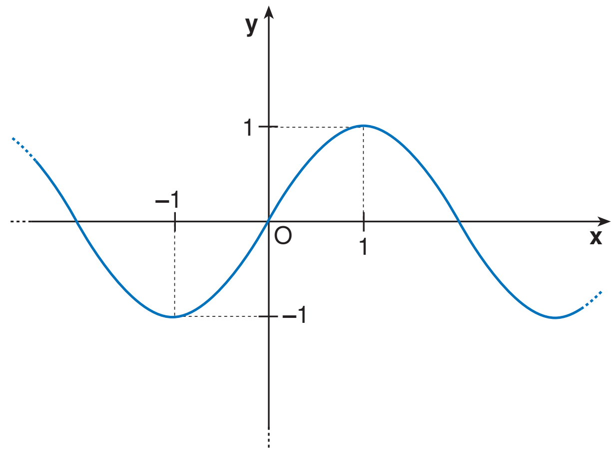
2. Individuiamo graficamente la regione R:

   L'area di R è il risultato dell'integrale

$$\int_0^4 [g(x) - f(x)]\, dx$$

cioè

$$\int_0^4 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right] dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{x^4}{4} + 8x^2\right]_0^4 = 64\,.$$



3. Rappresentiamo in figura:

   Risolviamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y = -15 \\ y = f(x) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} y = -5 \\ y = f(x) \end{cases}$$

   Nel primo otteniamo

$$\begin{cases} y = -15 \\ x^3 - 16x + 15 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 15) = 0 \end{cases}$$

   da cui si ricavano i punti:

$$A_1\,(1; -15)\ , \quad B\left(\frac{-1+\sqrt{61}}{2}; -15\right)\ , \quad C\left(\frac{-1-\sqrt{61}}{2}; -15\right)\ ;$$

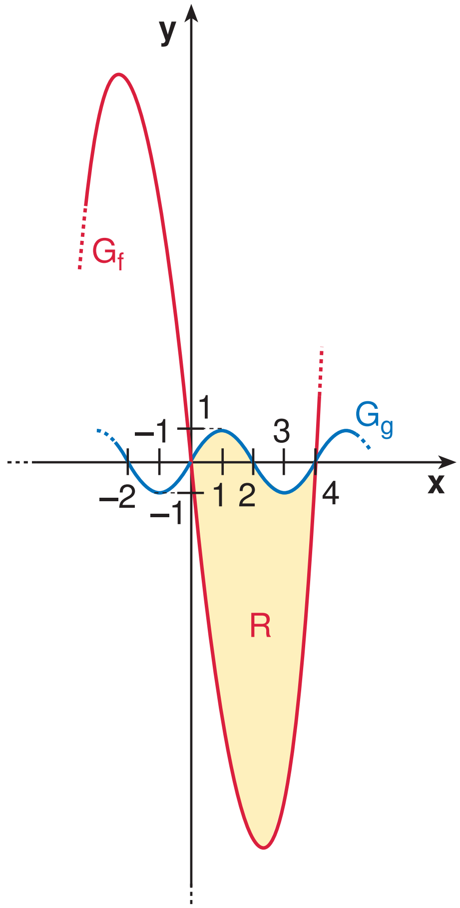
   di tali punti solo A e B si trovano sul bordo di R.

   Nel secondo sistema

$$\begin{cases} y = -5 \\ x^3 - 16x + 5 = 0 \end{cases}$$

   l'equazione di terzo grado ha radici non razionali; calcoliamo una loro approssimazione a meno di 10^{-1} come richiesto nell'intervallo $0 \le x \le 4$.

   Dal grafico deduciamo che una prima radice $\overline{x}_1$ ha ascissa compresa tra $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$; infatti se denotiamo con $p(x)$ il polinomio $x^3 - 16x + 5$, allora $p(0) = 5$ e



$p(1) = -10$ e per il teorema di esistenza degli zeri, $p(x)$ possiede una radice nell'intervallo $]0;1[$.

Ricaviamo la radice $\overline{x}_1$ mediante il metodo di bisezione:

$$x_1 = 0\,, \qquad p(x_1) = 5 > 0$$
$$x_2 = 1\,, \qquad p(x_2) = -10 < 0$$

$$\Rightarrow x_1 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_2$$

$$x_3 = 0.5\,, \qquad p(x_3) = -\frac{23}{8} < 0$$

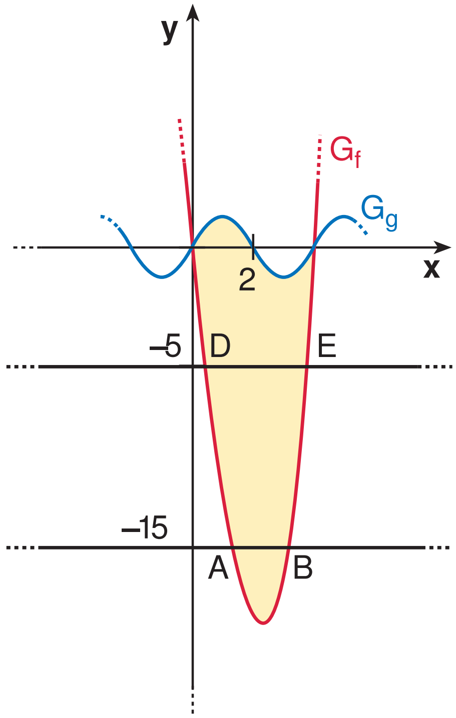
$$\Rightarrow x_1 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_3$$

$$x_4 = 0.25\,, \qquad p(x_4) = \frac{65}{64} > 0$$

$$\Rightarrow x_4 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_3$$

$$x_5 = 0.375\,, \qquad p(x_5) = -\frac{485}{512} < 0$$

$$\Rightarrow x_4 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_5$$



$$x_6 = 0.3125\,, \qquad p(x_6) = \frac{125}{4096} > 0$$

$$\Rightarrow x_6 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; x_5 \;\Rightarrow\; 0.3125 \;<\; \overline{x}_1 \;<\; 0.375\,.$$

Per quanto riguarda la seconda radice $\overline{x}_2$, la ricaviamo mediante il metodo delle tangenti, assumendo come punto iniziale $x_0 = 4$.

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 4 - \frac{5}{32} \simeq 3.844$$

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} \simeq 3.833$$

$$\Rightarrow \quad x_2 \;<\; \overline{x}_2 \;<\; x_1 \quad \Rightarrow \quad 3.833 \;<\; \overline{x}_2 \;<\; 3.844\,.$$

4. Il volume d'acqua della piscina può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y. Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0)\,.$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 S(x)dx = \int_0^4 \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x - x^3 + 16x\right]\cdot(5-x)dx = \\
&= 5\int_0^4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx + \int_0^4 \left(-5x^3 + x^4 + 80x - 16x^2\right)dx = \\
&= \left[-\frac{10}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x - \frac{5}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} + 40x^2 - \frac{16}{3}x^3\right]_0^4 - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx = \\
&= \frac{2752}{15} - \int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx\,.
\end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x\,, \qquad g'(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}xdx &= \left[-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^4 + \int_0^4 \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}xdx \\
&= -\frac{8}{\pi} + \left[\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x\right]_0^4 = -\frac{8}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \frac{2752\pi + 120}{15\pi}m^3$$

e perciò la capacità della piscina è di circa

$$186013.15l\,.$$