SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2011

1. Studio di $y = f(x)$:

   - $D_f = \mathbb{R}$.
   - Ricerca simmetrie: la funzione è dispari, infatti:

   $$f(-x) \ = \ -f(x)\,.$$

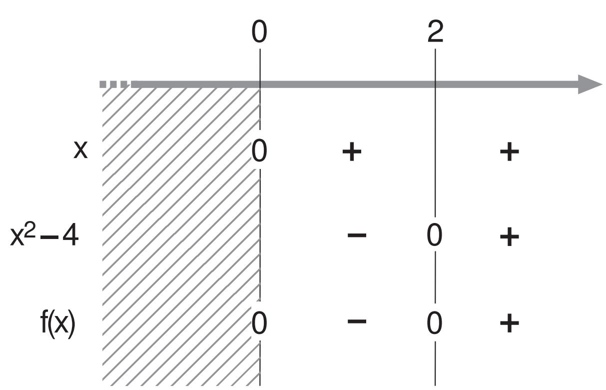
   Per questo motivo studiamo la funzione per $x \geq 0$; ricaveremo l'altra metà del grafico per simmetria rispetto all'origine O.

   - Punti di intersezione con gli assi coordinati: cominciamo con l'asse x:

   $$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2-4) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \vee x = \pm 2 \end{cases}$$

   Ci sono tre punti di intersezione con l'asse x: $A_1(-2;0), A_2(0;0), A_3(2;0)$. Di queste, A_2 è intersezione di $y = f(x)$ anche con l'asse y.

   - Positività: $x(x^2-4) > 0$:



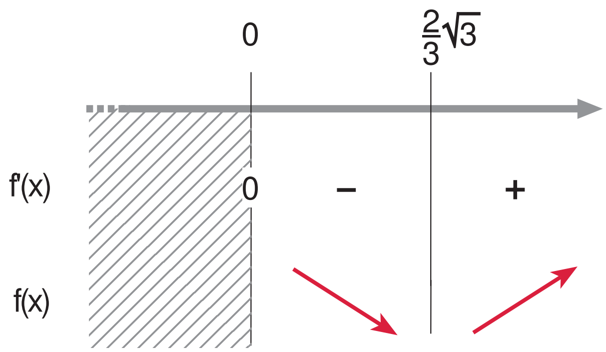
   Quindi la funzione $f(x)$ è positiva (in $x \geq 0$) per $x > 2$.

   - Comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali. Inoltre, poiché

   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,,$$

   non esistono asintoti orizzontali, né obliqui.

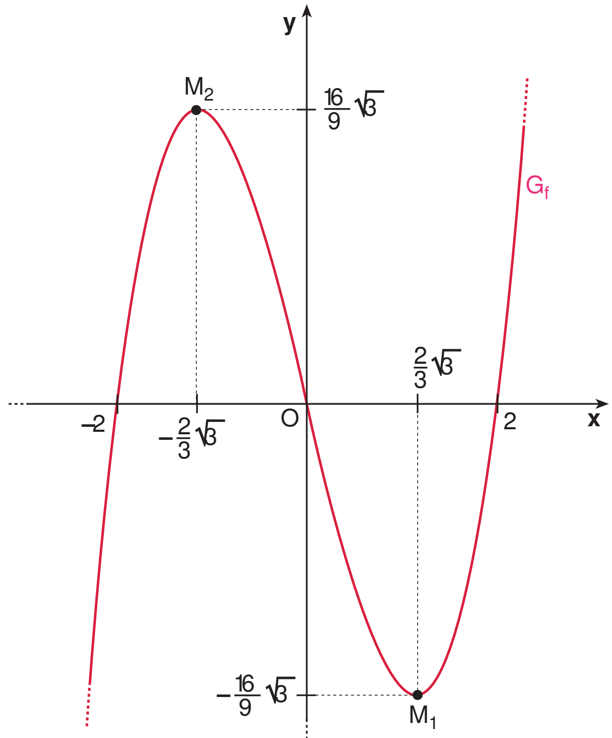
- Derivata prima:
$$f'(x) = 3x^2 - 4\,.$$
Studio del segno di $f'(x)$:

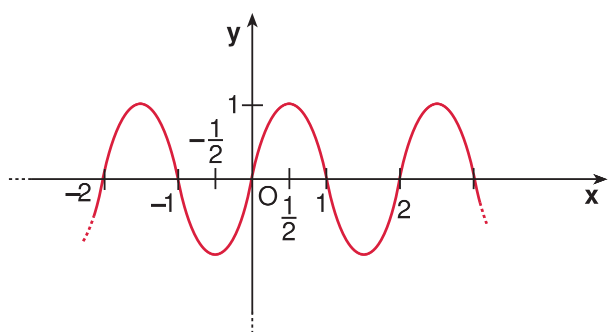


Nell'intervallo di studio la funzione è crescente per $x > \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.
Tale valore individua un punto di minimo relativo, secondo lo schema del segno di $f'(x)$ sopra riportato; calcoliamo le sue coordinate:
$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{8\sqrt{3}}{3} = -\frac{16\sqrt{3}}{9}\,.$$
Quindi il punto di minimo relativo è
$$M_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$
e per simmetria il punto
$$M_2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right)$$
è punto di massimo relativo.

- Derivata seconda:
$$f''(x) = 6x\,.$$
Studio del segno di $f''(x)$: nell'intervallo di studio è evidente che $f''(x)$ è sempre non negativa. Pertanto in tale intervallo la funzione volge la concavità verso l'alto. Inoltre il punto $O(0;0)$ in cui si annulla $f''(x)$ è un punto di flesso.

- Tracciamo il grafico G_f di $y = f(x)$, sfruttando la simmetria rispetto all'origine:





Studio di $g(x)$: tale funzione si ottiene da $y = \operatorname{sen} x$ mediante una contrazione orizzontale che porta il punto $(2\pi; 0)$ in $(2; 0)$.

2. - Calcoliamo l'intersezione G_f e la retta $y = -3$:

$$\begin{cases} y = -3 \\ y = f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x^3 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -3 \\ (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \end{cases}$$

da cui si ottengono le ascisse richieste: $x_1 = 1$ e $x^2 + x - 3 = 0$, cioè

$$x_1 = 1\,,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad x_3 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\,.$$

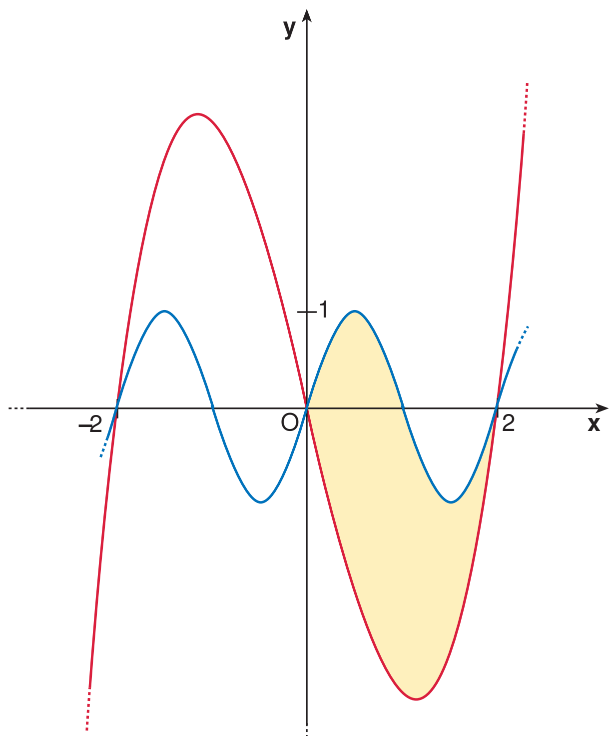
- I punti a tangente orizzontale del grafico di $y = \operatorname{sen} x$ nell'intervallo $[-6\pi; 6\pi]$ hanno coordinate

$$\left(\frac{2k+1}{2}\pi; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -6 \leq k \leq 5\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di conseguenza i punti a tangente orizzontale di G_g compresi nell'intervallo $[-6; 6]$ sono:

$$\left(\frac{2k+1}{2}; (-1)^k\right) \qquad \text{per} \quad -6 \leq k \leq 5\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3. Individuiamo graficamente la regione R: L'area di R è il risultato dell'integrale



$$\int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx$$

cioè

$$\int_0^2 [\operatorname{sen} \pi x - x^3 + 4x]\, dx = \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x - \frac{x^4}{4} + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\cos 2\pi - 4 + 8 + \frac{1}{\pi}\cos 0 = 4\,.$$

4. Il volume della vasca può essere calcolato nel modo seguente: sezioniamo il solido in esame con piani del tipo $x = x_0$ perpendicolari alla superficie della vasca e paralleli all'asse y. Otteniamo dei rettangoli di area

$$S(x_0) = [g(x_0) - f(x_0)] \cdot h(x_0)\,.$$

Quindi il volume della vasca espresso in m^3 è equivalente al valore dell'integrale definito:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x)dx = \int_0^2 [\operatorname{sen}\pi x - x^3 + 4x] \cdot (3 - x)dx = \\ &= 3\int_0^2 \operatorname{sen}\pi x dx - \int_0^2 x \operatorname{sen}\pi x dx + \int_0^2 \left(-3x^3 + x^4 + 12x - 4x^2\right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{\pi}\cos\pi x - \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^5}{5} + 6x^2 - \frac{4}{3}x^3\right]_0^2 - \int_0^2 x \operatorname{sen}\pi x dx\,. \end{aligned}$$

L'integrale $\int_0^2 x \operatorname{sen}\pi x dx$ può essere risolto per parti secondo la formula

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

e ponendo

$$f(x) = x\,, \qquad g'(x) = \operatorname{sen}\pi x\,.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \operatorname{sen}\pi x dx &= \left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{1}{\pi}\cos\pi x dx \\ &= -\frac{2}{\pi} + \left[\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi x\right]_0^2 = -\frac{2}{\pi}\,. \end{aligned}$$

In conclusione, sostituendo nell'espressione del volume V si ottiene:

$$V = \left(\frac{116}{15} + \frac{2}{\pi}\right) m^3 = \frac{116\pi + 30}{15\pi} m^3$$

e perciò la capacità della vasca è di circa

$$8369,95 l\,.$$

