SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2011

1. Poiché $e^x + 1$ è strettamente positivo per ogni x reale, il dominio della funzione

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

è $\mathbb{R}$: possiamo dunque studiare i limiti all'infinito.

Ricordando che

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,$$

risulta che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x+1} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^x+1} = 2,$$

Applicando i teoremi sul calcolo dei limiti segue subito che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Calcoliamo $f(x) + f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} - x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1} = \\ &= 2\ln 4 + \frac{2}{e^x+1} + \frac{2e^x}{e^x+1} = \\ &= 2\left(\ln 4 + \frac{1+e^x}{1+e^x}\right) \\ &= 2(\ln 4 + 1). \end{aligned}$$

Ricordiamo che il punto $P(x; y)$ corrisponde nella simmetria di centro A al punto $P'(x'; y')$ se A è il punto medio del segmento PP', cioè se

$$\frac{x+x'}{2} = x_A, \qquad \frac{y+y'}{2} = y_A.$$

Nel nostro caso, preso un generico punto P del grafico, di coordinate $(x; f(x))$, anche il punto P' di coordinate $(-x; f(-x))$ appartiene a Γ, e tale coppia di punti soddisfa le equazioni della simmetria di centro $A(0; \ln 4 + 1)$. Infatti:

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{x-x}{2} = 0, \qquad \frac{y+y'}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = \ln 4 + 1$$

2. Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - m$ è continua e ha limite rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$, perciò, dal teorema di esistenza degli zeri per le funzioni continue, esiste almeno un valore di x per cui $f(x) - m = 0$, e quindi $f(x) = m$. D'altra parte, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente, perché la sua derivata è strettamente positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + 2\left[-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right] = \\ &= 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \\ &= \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Per quanto visto nel punto 1, si ha $f(\alpha) + f(-\alpha) = 2(\ln 4 + 1)$, da cui si deduce che

$$f(-\alpha) = -f(\alpha) + 2(\ln 4 + 1) = -3 + 2(\ln 4 + 1) = 2\ln 4 - 1.$$

In conclusione, il valore di m richiesto è $m = 2\ln 4 - 1$

3. Sempre dalla relazione tra $f(x)$ e $f(-x)$ trovata nel punto 1, segue che

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(\ln 4 + 1) - f(-x) = \\ &= 2\ln 4 + 2 - \left(-x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1}\right) = \\ &= 2\ln 4 + 2 + x - \ln 4 - \frac{2}{e^{-x}+1} = \\ &= x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}. \end{aligned}$$

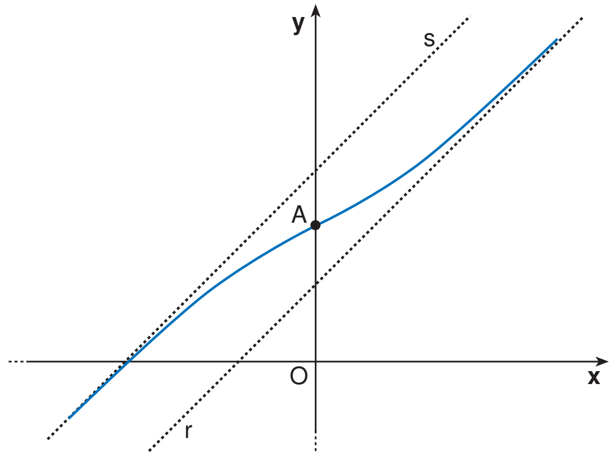
Cerchiamo gli asintoti di $f(x)$, e verifichiamo che essi coincidono con le rette r e s. Gli eventuali asintoti di $f(x)$ hanno coefficiente angolare pari al limite:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left[1 + \frac{\ln 4}{x} + \frac{2}{x(e^x+1)}\right] = 1,$$

e intercette pari ai limiti:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = \ln 4$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\ln 4 + \frac{2}{e^x+1}\right) = 2 + \ln 4.$$



Questi sono i valori del coefficiente angolare e delle intercette delle rette r e s.

Per dimostrare che Γ è interamente contenuta nella striscia piana compresa tra r e s, confrontiamo $f(x)$ con le equazioni degli asintoti.

Osserviamo che, essendo $e^x + 1 > 0$,

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1} > x + \ln 4$$

e quindi Γ sta al di sopra della retta r. D'altro canto, per quanto visto sopra,

$$f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1} < x + 2 + \ln 4.$$

quindi Γ sta al di sotto della retta s. Da queste osservazioni segue quanto richiesto.

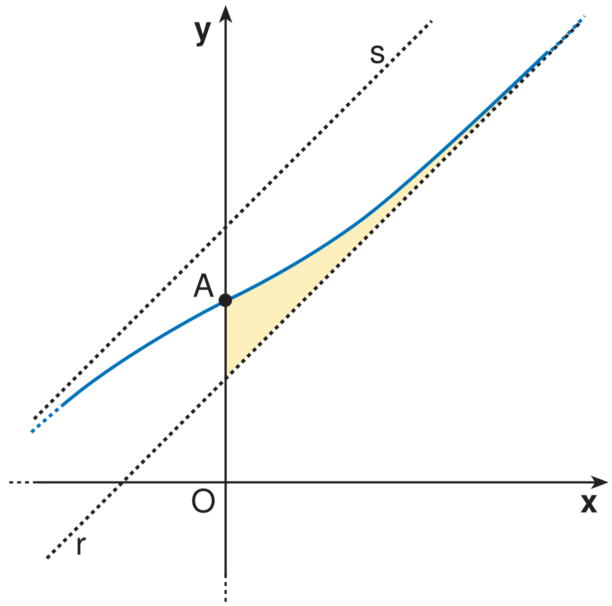
4. L'integrale $I(\beta)$ si può interpretare geometricamente come l'area della regione di piano delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $x = \beta$, dall'asintoto r e dal grafico Γ. Perciò, se il limite $\lim_{\beta \to +\infty} I_\beta$ è finito esso è uguale all'area compresa tra l'asse y, la curva Γ e la retta r.

   Passiamo al calcolo dell'integrale.

$$I(\beta) = \int_0^\beta [f(x) - x - \ln 4]\, dx = \int_0^\beta \frac{2}{e^x + 1}\, dx$$

   Calcoliamo l'integrale per sostituzione. Poniamo $t = e^x$, da cui $dx = \frac{1}{t} dt$:

$$I(\beta) = 2 \int_1^{e^\beta} \frac{1}{t(t+1)} dt.$$



La funzione integranda si può scrivere come somma di due frazioni aventi come denominatori t e $t+1$. Imponendo

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} = \frac{A + At + Bt}{t(t+1)},$$

e uguagliando i coefficienti dei numeratori si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. L'integrale da calcolare è equivalente a

$$2\int_1^{e^\beta} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2[\ln t - \ln(t+1)]_1^{e^\beta} = 2\left[\ln \frac{t}{t+1}\right]_1^{e^\beta} = 2\ln\left(\frac{e^\beta}{e^\beta+1}\right) - 2\ln\frac{1}{2}.$$

Poiché $\lim\limits_{\beta\to+\infty} e^\beta = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0$, risulta

$$\lim_{\beta\to+\infty} I(\beta) = -2\ln\frac{1}{2} = \ln 4.$$