

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ODINAMENTO 2010

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario¹.

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP . Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ .

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy , si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$, $x \in \mathbb{R}$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto $R(0;1)$? E nel punto $S(1;0)$? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S ?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS , ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy , si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0, b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b . Si illustri come varia G_b al variare di b .

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B . Si dimostri che, qualsiasi sia P , il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e ($e =$ numero di Nepero). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y , da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è $p^{(n)}(x) = n!a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n .
2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x} + 1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x; f(x))$ ha pendenza uguale a 2?
4. Si calcoli: $\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.
5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità del serbatoio?
6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$
7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x) = \begin{cases} 3x^2 - 11x - 4, & x \leq 4 \\ kx^2 - 2x - 1, & x > 4. \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?

9. Si provi che non esiste un triangolo ABC , con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\widehat{ABC} = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y .