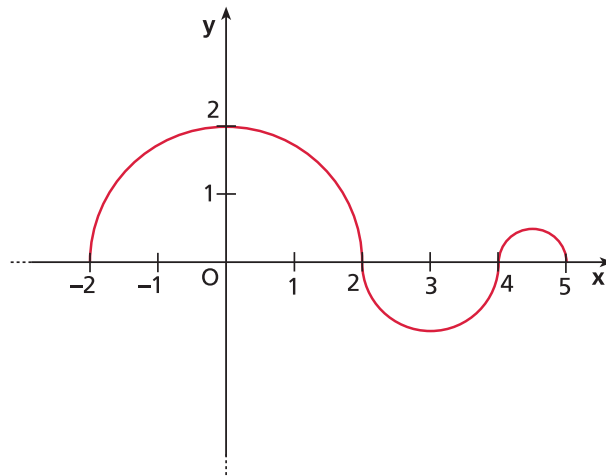


ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

Il candidato risolve uno dei due problemi e risponde a 5 quesiti del questionario¹.

PROBLEMA 1

Nella figura che segue è riportato il grafico di $g(x)$ per $-2 \leq x \leq 5$ essendo g la derivata di una funzione f . Il grafico consiste di tre semicirconferenze con centri in $(0; 0)$, $(3; 0)$, $(\frac{9}{2}; 0)$ e raggi rispettivi 2 , 1 , $\frac{1}{2}$.



- a) Si scriva un'espressione analitica di $g(x)$. Vi sono punti in cui $g(x)$ non è derivabile? Se sì, quali sono? E perché?
- b) Per quali valori di x , $-2 < x < 5$, la funzione f presenta un massimo o un minimo relativo? Si illustri il ragionamento seguito.
- c) Se $f(x) = \int_{-2}^x g(t)dt$, si determini $f(4)$ e $f(1)$.
- d) Si determinino i punti in cui la funzione f ha derivata seconda nulla. Cosa si può dire sul segno di $f(x)$? Qual è l'andamento qualitativo di $f(x)$?

¹Durata della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito ad un sistema Oxy di coordinate cartesiane siano assegnate le parabole d'equazioni: $y^2 = 2x$ e $x^2 = y$.

- a) Si disegnino le due parabole e se ne determinino le coordinate dei fuochi e le equazioni delle rispettive rette direttrici. Si denoti con A il punto d'intersezione delle due parabole diverso dall'origine O .
- b) L'ascissa di A è $\sqrt[3]{2}$; si dica a quale problema classico dell'antichità è legato tale numero e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2} .
- c) Sia \mathbf{D} la parte di piano delimitata dagli archi delle due parabole di estremi O e A . Si determini la retta r , parallela all'asse x , che stacca su \mathbf{D} il segmento di lunghezza massima.
- d) Si consideri il solido \mathbf{W} ottenuto dalla rotazione di \mathbf{D} intorno all'asse x . Se si taglia \mathbf{W} con piani ortogonali all'asse x , quale forma hanno le sezioni ottenute? Si calcoli il volume di \mathbf{W} .

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n . Si dimostri che la sua derivata n -esima è

$$p^{(n)}(x) = n! a_n$$

dove a_n è il coefficiente di x^n .

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A , r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B . Si dimostri che i tre triangoli PAB , PBC , PCA sono triangoli rettangoli.
3. Sia r la retta d'equazione $y = ax$ tangente al grafico di $y = e^x$. Quale è la misura in gradi e primi sessagesimali dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?

4. Si calcoli con la precisione di due cifre decimali lo zero della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1.$$

Come si può essere certi che esiste un unico zero?

5. Sia G il grafico di una funzione $x \rightarrow f(x)$ con $x \in \mathbb{R}$. Si illustri in che modo è possibile stabilire se G è simmetrico rispetto alla retta $x = k$.
6. Si trovi l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto dal punto P di coordinate $(3 \cos t; 2 \sin t)$ al variare di t , $0 \leq t \leq 2\pi$.
7. Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta.
8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}$, $\binom{n}{n-2}$, $\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ?
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 45^\circ$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $\hat{A}BC = 30^\circ$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.
10. Si consideri la regione R delimitata da $y = \sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$.
L'integrale $\int_0^4 2\pi x (\sqrt{x}) dx$ fornisce il volume del solido:
- a) generato da R nella rotazione intorno all'asse x ;
 - b) generato da R nella rotazione intorno all'asse y ;
 - c) di base R le cui sezioni con piani perpendicolari all'asse x sono semicerchi di raggio \sqrt{x} ;
 - d) nessuno di questi.

Si motivi esaurientemente la risposta.