**SOLUZIONE DEL QUESITO 4**
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010**

Sia $f(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 - 1$: essa è una funzione continua di dominio $\mathbb{R}$.
Per accertarsi dell'esistenza di un unico zero, calcoliamo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3x^2 = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3x^2 \,.$$

La derivata $f'(x)$ è positiva per ogni $x \neq 0$ e perciò $f(x)$ è monòtona crescente; in tali condizioni, il Primo teorema di unicità dello zero assicura l'esistenza di un unico zero in un intervallo $[a; b]$ limitato e chiuso, se $f(a) \cdot f(b) < 0\,$.
Calcoliamo $f(x)$ in alcuni valori:

$$f(0) = -1\,, \qquad f(1) = 1\,.$$

Quindi esiste un unico zero di $f(x)$ nell'intervallo $[0; 1]$; applichiamo il metodo di bisezione:
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} - \frac{7}{8} \simeq -0,081 < 0$ allora lo zero si trova in $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$;
$f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 1 \simeq 0,33 > 0$ allora lo zero si trova in $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$;
$f\left(\frac{5}{8}\right) = \sqrt[3]{\frac{5}{8}} + \left(\frac{5}{8}\right)^3 - 1 \simeq 0,099 > 0$ allora lo zero si trova in $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right]$;
$f\left(\frac{9}{16}\right) = \sqrt[3]{\frac{9}{16}} + \left(\frac{9}{16}\right)^3 - 1 \simeq 0,003 > 0.$
Lo zero approssimato a due cifre decimali della funzione è quindi $\frac{9}{16}$.