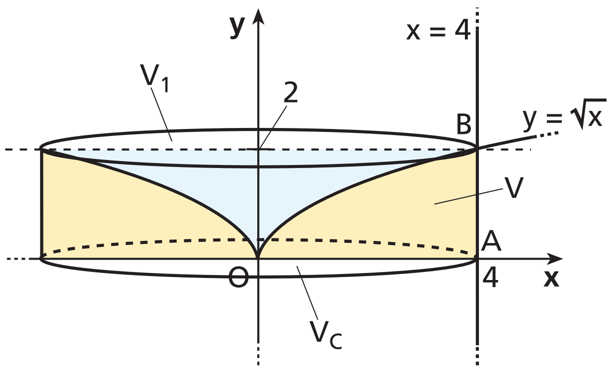
SOLUZIONE DEL QUESITO 10
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. 2010

La risposta giusta è la b). Infatti, il volume del solido S generato dalla rotazione della regione R attorno all'asse y può essere ottenuto nel seguente modo: consideriamo il cilindro C_x ottenuto ruotando attorno all'asse delle y il segmento di estremi $(x; 0)$ e $(x; \sqrt{x})$, con $0 \leq x \leq 4$. La superficie laterale di C_x è $S_x = (2\pi x)\sqrt{x}$. Pertanto, il volume di S è

$$\int_0^4 S_x dx = \int_0^4 (2\pi x)\sqrt{x} dx = \frac{4}{5}\pi \left[x^{\frac{5}{2}} \right]_0^4 = \frac{128}{5}\pi.$$



D'altro canto, il volume V del solido S si può ottenere come differenza tra il volume V_{CIL} del cilindro di raggio OA con $A(0; 4)$ e altezza AB con $B(4; 2)$, e il volume V_1 del solido ottenuto dalla rotazione della parte di piano delimitata da $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ e dall'asse y. Risulta:

$$V_{CIL} = \pi \cdot 4^2 \cdot 2 = 32\pi.$$

Poiché V_1 è uguale al volume del solido di rotazione intorno all'asse x della regione delimitata dal grafico della funzione $y = x^2$, dall'asse x e da $x = 2$, si ha:

$$V_1 = \pi \int_0^2 x^4 dx = \frac{\pi}{5}[x^5]_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$

Pertanto il volume V vale:

$$V = V_{CIL} - V_1 = 32\pi - \frac{32}{5}\pi = \frac{128}{5}\pi,$$

come desiderato.