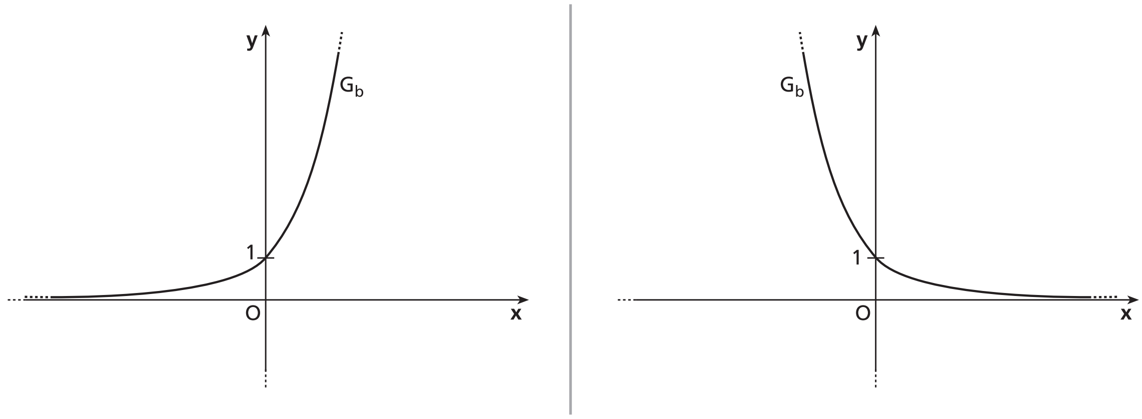
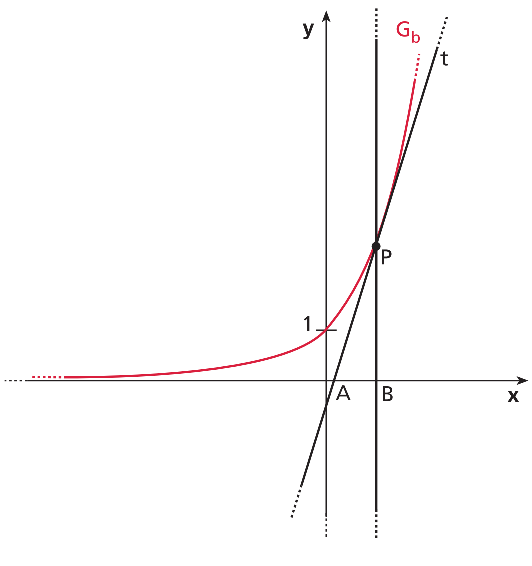
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

1. Distinguiamo due casi:

   $b > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < b < 1$



2. A titolo di esempio, rappresentiamo il grafico G_b nel caso $b > 1$.



P è un punto generico di G_b di coordinate $P(a; b^a)$. La retta t, tangente in P al grafico G_b, ha equazione

$$t: \; y - b^a = f'(a)(x - a)$$

ricordando che $f'(x) = \ln b \cdot b^x$, otteniamo:

$$t: \ y = \ln b \cdot b^a x - \ln b \cdot b^a \cdot a + b^a.$$

Evidentemente, $B(a; 0)$. Per ottenere le coordinate del punto A, risolviamo il sistema

$$A: \begin{cases} y = \ln b \cdot b^a x - \ln b \cdot b^a \cdot a + b^a \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava che l'ascissa di A verifica l'equazione

$$\ln b \cdot b^a x = \ln b \cdot b^a \cdot a - b^a \to x = a - \frac{1}{\ln b} \to A\left(a - \frac{1}{\ln b}; 0\right).$$

La lunghezza del segmento AB è

$$\left|a - \frac{1}{\ln b} - a\right| = \left|\frac{1}{\ln b}\right|$$

che è indipendente dalla scelta di P. La lunghezza del segmento AB è 1 se e solo se $\left|\frac{1}{\ln b}\right| = 1 \Leftrightarrow \ln b = \pm 1 \Leftrightarrow b = e \ \vee \ b = \frac{1}{e}$.

3. Poniamo $b = e$. Sia $Q(c; e^c)$ un punto generico di G_e. La retta tangente a G_e in Q ha equazione

$$t_Q: \ y = e^c x - ce^c + e^c.$$

Se vogliamo che t_Q passi per l'origine dobbiamo imporre che il termine noto $-ce^c + e^c$ si annulli:

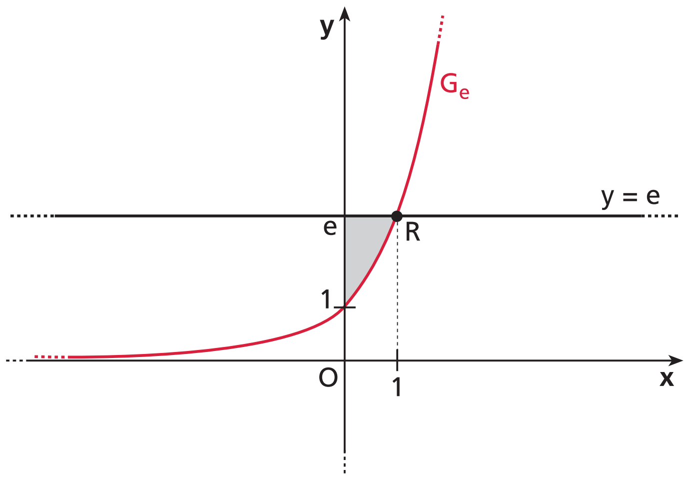
$$0 \in \ t_Q \to \ -ce^c + e^c = 0 \to c = 1$$

Pertanto, $r = t_1$. il coefficiente angolare di r è dato da $f'(1) = e$. Ciò significa che r forma un angolo di $\operatorname{arctg}(e)$ radianti con il semiasse positivo delle ascisse.

4. Dobbiamo calcolare l'area della regione desiderata (ombreggiata in figura)

Dapprima, calcoliamo l'ascissa del punto R di intersezione tra G_e e la retta di equazione $y = e$

$$R: \begin{cases} y = e \\ y = e^x \end{cases} \to x = 1 \wedge y = e$$



Pertanto l'area della regione ombreggiata è uguale al risultato dell'integrale

$$\int_0^1 (e - e^x)dx.$$

Per linearità, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e - e^x)dx &= \int_0^1 e\,dx - \int_0^1 e^x dx \\ &= [ex]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e-1) = 1\end{aligned}$$