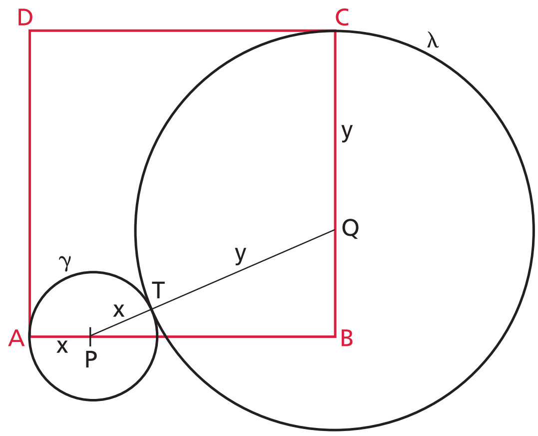
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO DI ORDINAMENTO 2010

1. Definiamo T il punto di tangenza tra le circonferenze γ e λ: perciò

$$\overline{QT} = \overline{AP} = x, \quad \overline{PB} = 1 - x.$$

Indichiamo il raggio della circonferenza λ con y:

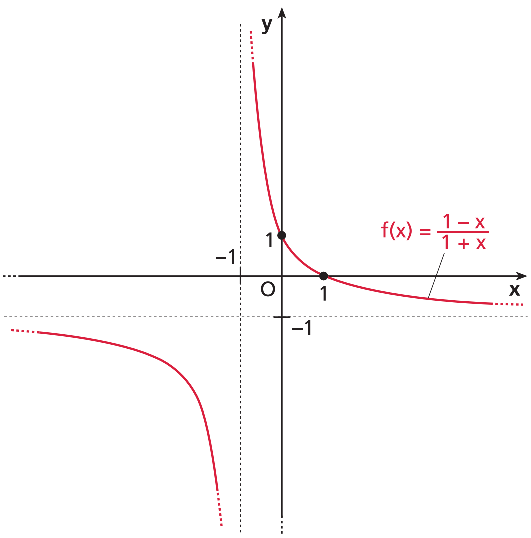
$$\overline{CQ} = \overline{CT} = y, \, \overline{BQ} = 1 - y.$$



Per ricavare y in funzione di x, osserviamo che il triangolo PBQ è un triangolo rettangolo e quindi verifica il teorema di Pitagora:

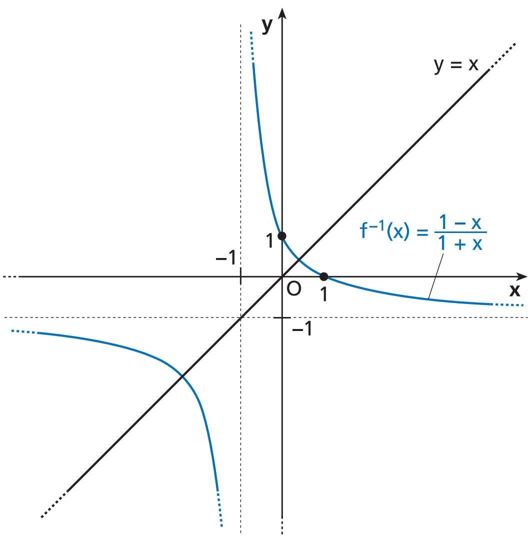
$$\begin{aligned}
& \overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BQ}^2 \\
\longrightarrow \quad & (x+y)^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 \longrightarrow \\
\longrightarrow \quad & x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \longrightarrow \\
\longrightarrow \quad & y(2x+2) = -2x + 2 \longrightarrow \\
\longrightarrow \quad & y = \frac{1-x}{1+x}
\end{aligned}$$

2. La funzione $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ è una funzione omografica definita per $x \neq -1$, di asintoti $x = -1$ e $y = -1$: il suo centro è il punto $(-1; -1)$. Le intersezioni con gli assi sono i punti (0;1) e (1;0.)



La funzione $f(x)$ è una funzione invertibile perchè suriettiva, per $y \neq -1$, e iniettiva.

Il grafico della funzione inversa $f^{-1}(x)$ si ottiene da quello di $f(x)$ mediante una simmetria assiale rispetto alla retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante.



Il grafico di $f^{-1}(x)$ coincide con quello di $f(x)$: infatti ricavando l'espressione analitica di $f^{-1}(x)$ si ottiene:

$$y = \frac{1-x}{1+x} \longrightarrow (1+x)y = 1-x \longrightarrow x(y+1) = 1-y \longrightarrow x = \frac{1-y}{1+y},$$

cioè $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = f(x)$.

3. Poichè $g(x) = |f(x)|$, osservando il grafico di $f(x)$ possiamo scrivere

$$g(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ \\ -f(x) = -\dfrac{1-x}{1+x} & \text{se } x < -1 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

In generale l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $g(x)$ nel suo punto $R(x_R; y_R)$ ha equazione:

$$y - y_R = g'(x_R)(x - x_R).$$

Quindi è necessario il calcolo della derivata $g'(x)$: poichè $x_R = 0$, allora

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

e

$$g'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

Valutando in $x_R = 0$, si ottiene $g'(x_R) = -2$ e infine l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ in R è:

$$y - 1 = -2(x - 0) \longrightarrow y = -2x + 1.$$

Nel punto S la funzione $g(x)$ non è derivabile; infatti, calcolando la derivata $g'(x)$ si ottiene:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \dfrac{2}{(1+x)^2} & \text{se } x < -1 \ \vee \ x > 1 \end{cases}$$

Per $x = 1$ si ha

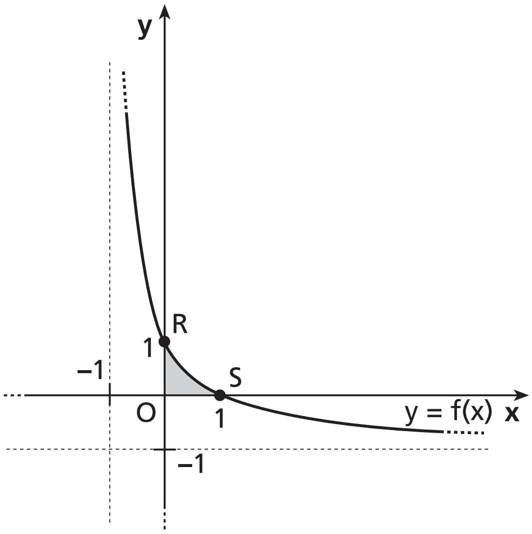
$$\lim_{x \to 1^-} g'(x) = \lim_{x \to 1^-} -\frac{2}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 1^+} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{1}{2}$$

I due limiti sono diversi e perciò $g(x)$ non è derivabile in $x = 1$: pertanto non esiste la retta tangente al grafico di $g(x)$ per $x = 1$.

4. L'area del triangolo mistilineo ROS corrisponde a

$$\int_0^1 f(x)dx,$$



cioè

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}dx &= \int_0^1 \frac{-(1+x)+2}{1+x}dx = \\
&= \int_0^1 \left(-1+\frac{2}{1+x}\right)dx = \\
&= \int_0^1 -1dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \\
&= [-x]_0^1 + 2\left[\ln|1+x|\right]_0^1 = \\
&= -1+0+2(\ln 2 - \ln 1) = -1+2\ln 2 = -1+\ln 4.
\end{aligned}$$

