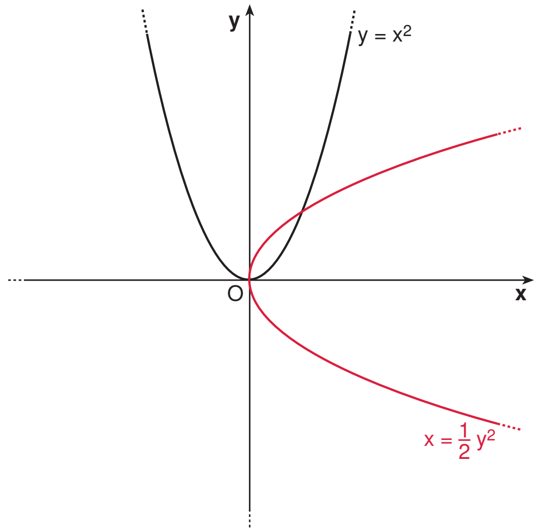
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2010

a) La parabola di equazione $y^2 = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}y^2$, ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse delle x, il vertice nell'origine O. Di conseguenza il fuoco ha coordinate $F_1\left(\frac{1-\Delta}{4a}; 0\right)$, cioè $F_1\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ e la direttrice ha equazione $x = -\frac{1}{2}$.

La parabola di equazione $y = x^2$ ha l'asse di simmetria coincidente con l'asse y, il vertice nell'origine degli assi, il fuoco $F\left(0; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$, ovvero $F_2\left(0; \frac{1}{4}\right)$. La direttrice è, quindi, per simmetria la retta $y = -\frac{1}{4}$.



Per determinare le coordinate del punto di intersezione A delle due parabole, risolviamo il sistema costituito dalle equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}y^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = \frac{1}{2}x^4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(2 - x^3) = 0 \end{cases}$$

Ne segue:

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt[3]{2}.$$

Troviamo, quindi, oltre all'origine, l'intersezione $A(\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{4})$.

b) Il numero $\sqrt[3]{2}$ è legato al problema della *duplicazione del cubo* che consiste nella costruzione di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo l assegnato. Lo spigolo l' del cubo cercato è, perciò, tale che $l'^3 = 2l^3$, cioè $l' = \sqrt[3]{2} \cdot l$.

Il problema della duplicazione del cubo, assieme al problema della *trisezione dell'angolo* e a quello della *quadratura del cerchio*, costituisce uno dei tre problemi classici della geometria greca, rilevanti in quanto non risolubili con riga e compasso.

Per approssimare il numero $\sqrt[3]{2}$, usiamo il metodo delle tangenti. Per far ciò pensiamo tale numero come l'unica radice della funzione $f(x) = x^3 - 2$. Tale funzione, nell'intervallo $[1, 2]$, è crescente e ha la concavità rivolta verso l'alto. Inoltre $f(2) > 0$.

Utilizzando la formula di ricorrenza compiliamo una tabella:

n	x_n	$f(x_n) = x^3 - 2$	$f'(x_n) = 3x^2$	$x_n - x_{n-1}$
0	2,000	6,000	12,000	
1	1,500	1,375	6,750	0,500
2	1,296	0,178	5,041	0,204
3	1,261	0,005	4,770	0,035
4	**1,260**			**0,001**

Il valore di $\sqrt[3]{2}$ approssimato a meno di 10^{-2} è, quindi,

$$\sqrt[3]{2} \simeq 1,26.$$

c) Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = k$. Affinché intersechi la regione di piano D evidenziata in figura dobbiamo considerare $0 \leq k \leq \sqrt[3]{4}$.

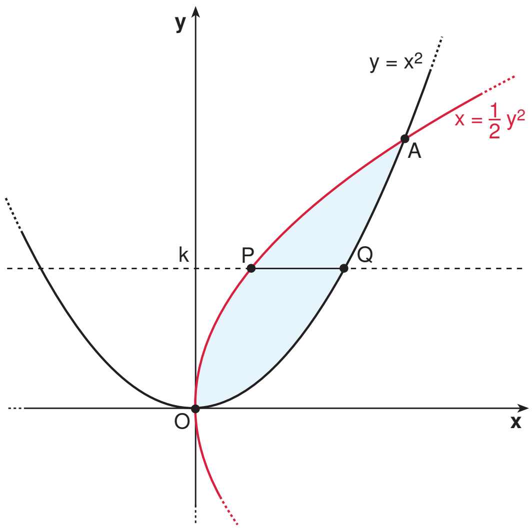
Chiamiamo P e Q le intersezioni della retta $y = k$ con le due parabole, come in figura. Ne segue che l'ascissa di P vale $x_P = \frac{1}{2}k^2$ e quella di Q vale $x_Q = \sqrt{k}$.

Di conseguenza, $\overline{PQ} = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2$. Occorre, quindi, calcolare il massimo della funzione

$$f(k) = \sqrt{k} - \frac{1}{2}k^2,$$

nel dominio $\left[0; \sqrt[3]{4}\right]$. Per far ciò, calcoliamone la derivata agli estremi del dominio:

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - k.$$



studiamo il segno della derivata:

$$f'(k) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad 1 - 2k\sqrt{k} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad k^{\frac{3}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad k \leq \sqrt[3]{\frac{1}{4}}.$$

Il segmento di lunghezza massima si ottiene, quindi, in corrispondenza della retta $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$.

d) Se si taglia il solido W ottenuto dalla rotazione della regione D intorno all'asse x con un piano $x = h$ ortogonale all'asse x si possono le seguenti sezioni:

- per $h = 0$ si ottiene un punto;
- per $0 < h < \sqrt[3]{2}$ si ottiene una corona circolare;
- per $h = \sqrt[3]{2}$ si ottiene una circonferenza.

Il volume di W vale:

$$\begin{aligned} V_W &= \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} 2x\,dx - \pi \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^4 dx = \pi \left[x^2 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt[3]{2}} = \\ &= \pi \left(\sqrt[3]{4} - \frac{2\sqrt[3]{4}}{5} \right) = \frac{3\sqrt[3]{4}}{5}\pi. \end{aligned}$$

