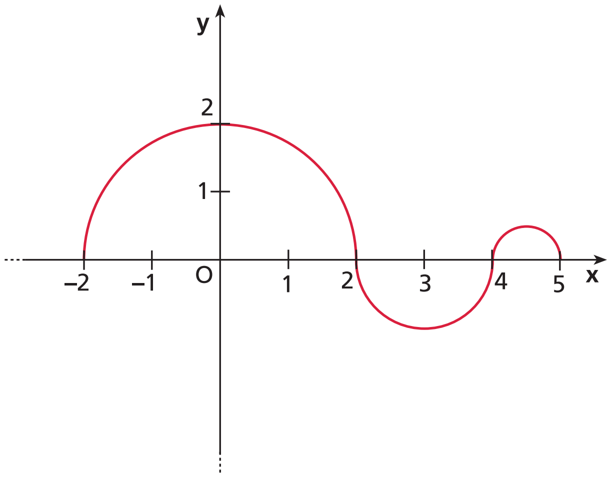
SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
CORSO SPERIMENTALE P.N.I 2010

a)



La funzione $g(x)$ è individuata da

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{1-(x-3)^2} & \text{se } 2 < x \le 4 \\ \sqrt{\dfrac{1}{4} - \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2} & \text{se } 4 < x \le 5 \end{cases}$$

cioè

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{se } -2 \le x \le 2 \\ -\sqrt{-x^2+6x-8} & \text{se } 2 < x \le 4 \\ \sqrt{-x^2+9x-20} & \text{se } 4 < x \le 5 \end{cases} .$$

Per stabilire i punti di non derivabilità calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} & \text{se } -2 < x < 2 \\[2ex] \dfrac{x-3}{\sqrt{1-(x-3)^2}} & \text{se } 2 < x < 4 \\[2ex] -\dfrac{x-\dfrac{9}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{9}{2}\right)^2}} & \text{se } 4 < x < 5 \end{cases} .$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to -2^+} g'(x) = \lim_{x\to -2^+} -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = +\infty\,.$$

La funzione $g(x)$ non è derivabile in $x=-2$.
Analogamente la funzione $g(x)$ non è derivabile in

$$x=2,\quad x=4,\quad x=5$$

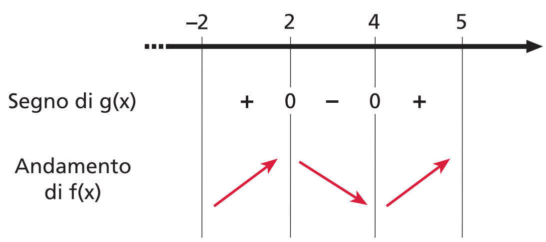
perché

$$\lim_{x\to 2} g'(x) = -\infty\,,\quad \lim_{x\to 4} g'(x) = +\infty\,,\quad \lim_{x\to 5^-} g'(x) = -\infty\,.$$

b) Dato che $g(x)$ è la derivata di $f(x)$, i punti di massimo o minimo di quest'ultima sono individuati da quei punti di intersezione tra $y=g(x)$ e l'asse delle ascisse in cui $g(x)$ cambia di segno. Essi sono

$$x=2\,,\qquad x=4\,.$$

In particolare, poiché $g(x)$ è positiva in un intorno sinistro sufficientemente piccolo di $x=2$ e negativa in un suo intorno destro, allora $x=2$ è un massimo per $f(x)$.



Viceversa $x=4$ è un minimo per $f(x)$.

c)

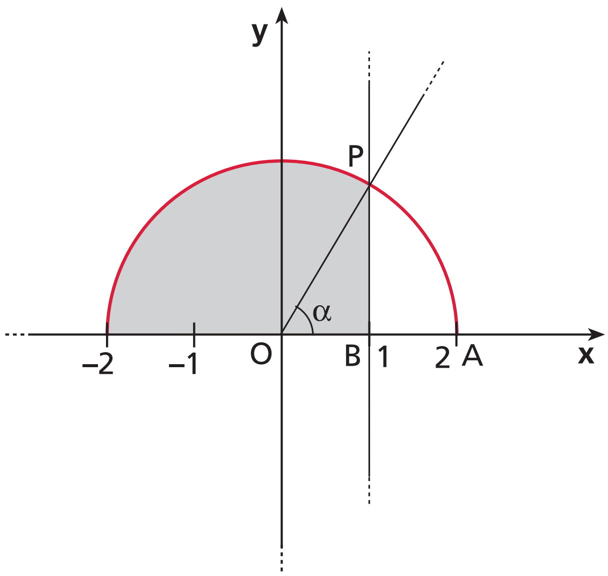
$$f(4) = \int_{-2}^{4} g(t)dt$$

Tale integrale corrisponde alla somma algebrica tra le aree delle due semicirconferenze con centri $C_1(0;0)$ e raggio 2 e $C_2(3;0)$ e raggio 1:

$$f(4) = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$f(1) = \int_{-2}^{4} g(t)dt.$$

Tale integrale corrisponde all'area indicata in figura



Essa è uguale alla differenza tra l'area della semicirconferenza (che vale 2π) e l'area del triangolo mistilineo APB; quest'ultima è pari all'area del settore circolare AOP meno l'area del triangolo OBP.

Innanzitutto $P(1;\sqrt{3})$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Quindi

$$\mathcal{A}(\widehat{APB}) = \frac{1}{3} \cdot 2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine

$$f(1) = 2\pi - \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

d) I punti in cui $f(x)$ ha derivata seconda nulla sono i punti critici di $g(x)$:

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = \frac{9}{2}.$$

In generale, non si può dedurre il segno di una funzione dalla conoscenza della sua derivata, poiché le primitive di una stessa funzione differiscono per una costante. Se invece assumiamo $f(x)$ come al punto c), allora osserviamo che $f(x) \geq 0$ in $[-2; 5]$ poiché per $-2 \leq x \leq 5$, $f(x)$ corrisponde all'area sottesa al grafico di $g(x)$. In particolare:

- $f(-2) = 0$
- $f(1) = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $f(2) = 2\pi$
- $f(4) = \frac{3}{2}\pi$
- f è crescente per $-2 < x < 2 \vee 4 < x < 5$
- f ammette un massimo relativo in $x = 2$ e un minimo relativo in $x = 4$
- f è convessa per $-2 < x < 0 \vee 3 < x < \frac{9}{2}$
- f ammette flessi nei punti $x = 0$, $x = 3$ e $x = \frac{9}{2}$.